場合の数（個数の処理）　overview

by u1248

A.　同じものを含む順列

（1）5 個の記号○○○××を並べる方法は何通りか。

（答え）$\dfrac{5!}{3!2!}=10$ 通り

（2）6 個の文字 a,a,a,b,b,c を並べる方法は何通りか。

（答え）$\dfrac{6!}{3!2!1!}=60$ 通り

B.　組合せ

（1）A,B,C,D,E の５人から３人を選ぶ方法は何通りか。

（答え）${}_5C_3=\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$ 通り

これは A(1)と同じである。なぜなら、

A,B,C,D,E の５人から３人を選ぶことは

A	B	C	D	E

この空欄に○○○××を並べる方法を考えることと同じだからである。

実際　${}_5C_3=\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=\dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=\dfrac{5!}{3!2!}$　が成り立つ。

（2）A,B,C,D,E,F の 6 人から３人の掃除係と２人の食事係を選ぶ方法は何通りか。

（答え）まず、６人から３人の掃除係を選び、次に残りの３人から２人の食事係を選べばよいから

$${}_6C_3\cdot{}_3C_2=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{3\cdot2}{2\cdot1}=60$$

これは A(2)と同じである。なぜなら、a を掃除係、b を食事係、c は仕事が当らないことを表す記号として

A	B	C	D	E	F

この空欄に a,a,a,b,b,c を並べる方法を考えればよいからである。

この場合も ${}_6C_3\cdot{}_3C_2=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\dfrac{3\cdot2}{2\cdot1}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1}=\dfrac{6!}{3!2!1!}$　が成り立つ。

C.　順列

A,B,C,D,E の 5 人から 3 人を選んで 1 列に並べる並べ方は何通りか。

（答え）$_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ 通りであるが

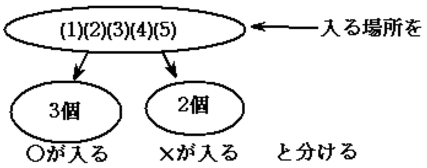
実は　$\dfrac{5!}{1!1!1!2!} = 60$ 通り　と計算することができる。　なぜならば、

A	B	C	D	E

この空欄に(1)(2)(3)××を並べる方法を考えることと同じだからである。

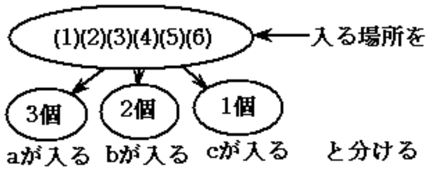
D.　組み分け（分配）

A（1）5 個の記号○○○××を並べる方法は何通りか。



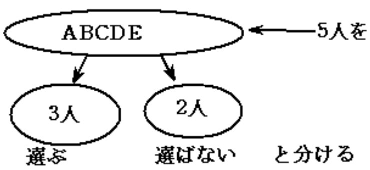
$$\frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ 通り}$$

（2）6 個の文字 a,a,a,b,b,c を並べる方法は何通りか。



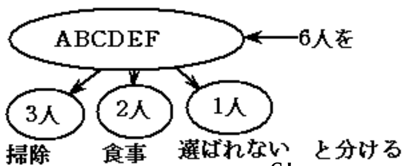
$$\frac{6!}{3!2!1!} = 60 \text{ 通り}$$

B(1）A,B,C,D,E の 5 人から 3 人を選ぶ方法は何通りか。



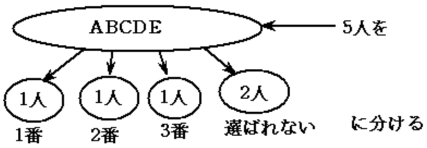
$$\frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ 通り}$$

（2）A,B,C,D,E,F の 6 人から 3 人の掃除係と 2 人の食事係を選ぶ方法は何通りか。



$$\frac{6!}{3!2!1!} = 60 \text{ 通り}$$

C　A,B,C,D,E の 5 人から 3 人を選んで 1 列に並べる並べ方は何通りか。



$$\frac{5!}{1!1!1!2!} = 60 \text{ 通り}$$

※　この表現方法は階乗表現にそのまま結びついているので、思考モデルとして、生徒にとって使いやすい。

雑誌　数学教室 2009 年 6 月号

2項定理・多項定理の新しい見方（係数がすべて1の多項定理）

西谷　優一（北海道）

1.　予感

先日，3年生に，「2項定理は知ってるよね」と言って授業を始めようとしたら，「あんなの，覚えられない！」「式が複雑！」など，非難ごうごうだったので，

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$　…①

という公式は知っているよね。

この①の公式は，

$$(x+y)^3=\frac{3!}{3!0!}x^3y^0+\frac{3!}{2!1!}x^2y+\frac{3!}{1!2!}xy^2+\frac{3!}{0!3!}x^0y^3 \quad \cdots②$$

と書いても同じだよね。確認してごらん。

（生徒は確認）なるほど。

②の右辺は，一見複雑に見えるけど，

$$\frac{(\bigcirc+\square)!}{\bigcirc!\square!}x^{\bigcirc}y^{\square}$$

の形の式の $\bigcirc+\square=3$ をみたす形のものを全部足せば良いわけだから，見た目以上に簡単だね。これが，3乗だけで終わるんだったら「たまたま」成り立っただけなんだけど，そうじゃないんだ。

$(x+y)^0=1$

$(x+y)^1=x+y$

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

でも同じ法則が成り立っていることを，確認してごらん。

（生徒確認）感心した様子

ところで，係数の

$$\frac{(\bigcirc+\square)!}{\bigcirc!\square!}$$

の部分なんだけど，これ，コンビネーションで表すことができるんだ。

例えば，${}_5C_3$は

$${}_5C_3=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=\frac{5!}{3!2!}$$

だよね。

この式を，右辺から逆に読んでみると，例えば，

$\frac{7!}{4!3!}$ をコンビネーションで表すことができるかい？

（生徒すぐに反応）そうだ，${}_7C_4$だね。

一般的には

$$\frac{(\bigcirc+\square)!}{\bigcirc!\square!}={}_{\bigcirc+\square}C_{\bigcirc}$$

が成り立つことになる。

それじゃ，②の式をコンビネーションで表してごらん。

（生徒作業）わかった。

それが2項定理なんだよ。

実は，話はこれで終わらない。

例えば，

●こ・そ・あ・ど／ん な こ と● ～投稿のページ～

$(x+y+z)^5$ を展開すると，どんな形になると思う？.

（数人の生徒が気付く）そう。

$$\frac{(\bigcirc+\square+\triangle)!}{\bigcirc!\square!\triangle!}x^{\bigcirc}y^{\square}z^{\triangle}$$

の形の式の $\bigcirc+\square+\triangle=5$ をみたす形のものを全部足せば良い。ここまでくれば，$(x+y+z+u)^7$ でも同じだね。

これを多項定理という。

それじゃ，なぜこんな式が導けるんだろう，知ってるかい？

……………………

と授業が続いていったが，私は，ある事実に気が付いて，うきうきした気分になっていた。

2. 「シンジラレナーィ！」美しさ

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \quad \cdots①$$

を

$$(x+y)^3 = \frac{3!}{3!0!}x^3y^0+\frac{3!}{2!1!}x^2y + \frac{3!}{1!2!}xy^2+\frac{3!}{0!3!}x^0y^3 \quad \cdots②$$

と書いたついでに，

②の両辺を 3! で割ってみよう。

すると，

$$\frac{(x+y)^3}{3!} = \frac{x^3y^0}{3!0!}+\frac{x^2y}{2!1!}+\frac{xy^2}{1!2!}+\frac{x^0y^3}{0!3!} \quad \cdots③$$

となる。

③は，すべて $\frac{x^n}{n!}$ の形の式で表現されている。そこで，

$x^{<n>}=\frac{x^n}{n!}$ と書くことにすると，

③は

$$(x+y)^{<3>} = x^{<3>}y^{<0>}+x^{<2>}y^{<1>} + x^{<1>}y^{<2>}+x^{<0>}y^{<3>}$$

と書けてしまう。

右辺は $\sum_{i+j=3}x^{<i>}y^{<j>}$ （i, j は非負の整数）の形である。

すると，これを一般化して，

$$\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^{<n>} = \sum_{\sum_{j=1}^{m}l_j=n}\left(\prod_{j=1}^{m}x_j^{<l_j>}\right)$$

と書くこともできる。

とにかく，きれいさっぱり係数が消えてしまう。

$x^{<n>}=\frac{x^n}{n!}$ の形は数学の至る所に現れてくる。

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}x^{<n>}$$

や，

点 $(0,0,0)$，$(x,0,0)$，$(0,x,0)$，$(0,0,x)$ を結んでできる図形の体積 $\frac{x^3}{3!}=x^{<3>}$ など，なにかがあるような気がしてならない。

話は，突然ここで終わる。「この続きを書くには，余白が足りない」という理由で。

（遺愛女子高校）

1.

１）２、３、４、４と書かれた４枚のカードの中から３枚のカードを選んで左から右に１列に並べる場合の数は何通りあるか。ただし、同じ数字の場合は区別しないものとする。

２）１，１，２，３，３と書かれた５枚のカードの中から４枚のカードを選んで左から右に１列に並べる場合の数は何通りあるか。ただし、同じ数字の場合は区別しないものとする。

2.

１）ａ，ａ，ｂ，ｂ，ｂの５文字を１列に並べる順列は何通りあるか。

２）ａ，ａ，ｂ，ｂ，ｂ，ｂ，ｃの７文字を１列に並べる順列は何通りあるか。

３）ｉｎｔｅｒｎｅｔは８個の文字によってできている。これら８個の文字を全て利用してできる文字列は何通りあるか。

3.　ａｎｓｗｅｒの全ての文字を１列に並べるとき、母音のａ，ｅがこの順であるものは何通りあるか。

4.　ｄｉｓｔａｎｃｅの全ての文字を１列に並べるとき、母音ｉ，ａ，ｅがこの順であるものは何通りあるか。

5.　１）３個の文字ａ，ｂ，ｃから同じものを何度使ってもよいものとして、6 個取り出す組み合わせは何通りあるか。

２）アップル、マスカット、オレンジ、ピーチの 4 種類のジュースが、どれでも合わせて 4 本 1000 円で売られている。4 本の選び方は何通りあるか。

6.

１）　ａ，ｂ，ｃ，ｄ，ｅ，ｆ，ｇの７文字から３文字選ぶとき、その選び方の総数は何通りあるか。

２）　１組のトランプ 52 枚から、4 枚選ぶときその選び方の総数は何通りあるか。

３）　硬貨８枚を同時に投げるとき、表が５枚出るのは何通りあるか。

４）　ａ，ｂ，ｃ，ｄ，ｅの５文字から３文字選ぶとき、その選び方の総数は何通りあるか。

５）硬貨６枚を同時に投げるとき、裏が３枚出るのは何通りあるか。

7. 男子 5 人、女子 4 人の合計 9 人のグループでパーティーを開くことになり、この中から 3 人が買い物に出かけることになった。この 3 人の選び方について次の問いに答えよ。

１）3 人の選び方は何通りあるか。

２）男子１人、女子２人となる選び方は何通りあるか。

３）3 人の中に、特定の男子１人Ａを含む選び方は何通りあるか。

8. 正六角形の頂点を用いてできる図形について、次の問いに答えよ。

１）対角線は全部で何本あるか。

２）頂点を結んでできる三角形は何個あるか。

9. 正八角形の頂点を用いてできる図形について、次の問いに答えよ。

１）対角線は全部で何本あるか。

２）頂点を結んでできる三角形は何個あるか。

10. 異なる 9 冊の本について、次の問いに答えよ。ただし、本棚に並べる順番は考えないものとする。

１）本棚の 1 段目に入れる 3 冊を選ぶ選び方は何通りあるか。

２）3 冊ずつ、本棚の 1 段目、2 段目、3 段目に入れるわけ方は何通りあるか。

３）3 冊ずつ、3 組に分けるわけ方は何通りあるか。

11. 生徒 6 人を 3 つのグループに分けるとき、次の問いに答えよ。

１）２人ずつ、3 つのグループＡ，Ｂ，Ｃに分けるわけ方は何通りあるか。

２）2 人ずつ、3 つのグループに分けるわけ方は何通りあるか。

12. 次の式を展開したとき、［　］内の項の係数を求めよ。

１）$(x-2y)^6$　［x^3y^3］　　２）$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^9$　［定数項］

３）$(a+b)^7$　［a^5b^2］　　４）$(2x-3y)^8$　［x^6y^2］

５）$\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)^6$　［定数項］　　６）$(x+y+z)^6$　［x^2y^3z］

７）$(x+2y+3z)^5$　［x^2yz^2］　　８）$(x-y+z)^7$　［$x^2y^3z^2$］

９）$(x+2y-3z)^6$　［x^3y^2z］

確率　overview

13. １）赤玉６個と白玉４個が入っている袋から３個の玉を同時に取り出すとき、赤玉２個以上が取り出される確率を求めよ。

２）赤玉５個と白玉４個が入っている袋から３個の玉を同時に取り出すとき、赤玉２個以上が取り出される確率を求めよ。

14. n人でじゃんけんをするとき、あいこになる確率を求めよ。

15. n個のサイコロを同時に投げるとき、次の確率を求めよ。

1) 出た目が全て２以上である確率　　2) 出た目の最小値が 1 である確率

3) 出た目の最小値が 1 で、最大値が 5 である確率

16. １枚の硬貨を６回続けて投げるとき、次の確率を求めよ。

１）表が５回出る確率　　２）表が４回出る確率

３）表の出る回数が４回以下である確率

17. 数直線上に点Ｐがある。

１）Ｐは原点を出発し、サイコロを１回投げるごとに、２以下の目が出たら負の方向に２進み、３以上の目が出たら正の方向に１進む。サイコロを６回投げたとき、Ｐが元の位置にいる確率を求めよ。

２）Ｐは原点を出発し、コインを１回投げるごとに、表が出たら正の方向に１、裏が出たら負の方向に１進む。コインを７回投げたとき、Ｐが１の位置にいる確率を求めよ。

場合の数（個数の処理）　overview　答え

1. 1） $\dfrac{4!}{1!1!2!}=12$　何故でしょう

(1)	(2)	(3)	×

この空欄に 2,3,4,4 を並べる方法を考えることと同じだからである。

上の欄には「互いに異なるもの」を並べるとよい。

2） $\dfrac{5!}{2!1!2!}=30$

2. 1） $\dfrac{5!}{2!3!}=10$　2） $\dfrac{7!}{2!4!1!}=105$　3） $\dfrac{8!}{1!2!2!2!1!}=5040$

3. $\dfrac{6!}{2!1!1!1!1!}=360$

4. $\dfrac{8!}{3!1!1!1!1!1!}=6720$

5. 1） $\dfrac{8!}{6!2!}=28$　2） $\dfrac{7!}{4!3!}=35$

6. 1） $\dfrac{7!}{3!4!}=35$　2） $\dfrac{52!}{4!48!}=270725$　3） $\dfrac{8!}{5!3!}=56$　4） $\dfrac{5!}{3!2!}=10$　5） $\dfrac{6!}{3!3!}=20$

7. 1） $\dfrac{9!}{3!6!}=84$　2） $\dfrac{5!}{1!4!}\cdot\dfrac{4!}{2!2!}=30$　3） $\dfrac{8!}{2!6!}=28$

8. 1） $\dfrac{6!}{2!4!}-6=9$　2） $\dfrac{6!}{3!3!}=20$

9. 1） $\dfrac{8!}{2!6!}-8=20$　2） $\dfrac{8!}{3!5!}=56$

10. 1） $\dfrac{9!}{3!6!}=84$　2） $\dfrac{9!}{3!3!3!}=1680$　3） $\dfrac{9!}{3!3!3!}\div 3!=280$

11. 1） $\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$　2） $\dfrac{6!}{2!2!2!}\div 3!=15$

12. 1） $\dfrac{6!}{3!3!}\cdot(-2)^3=-160$　2） $\dfrac{9!}{3!6!}\cdot(-2)^6=5376$

3） $\dfrac{7!}{5!2!}=21$　4） $\dfrac{8!}{6!2!}2^6(-3)^2=16128$　5） $\dfrac{6!}{4!2!}\cdot 2^4\cdot(-1)^2=240$　6） $\dfrac{6!}{2!3!1!}=60$

7） $\dfrac{5!}{2!1!2!}\cdot 2\cdot 3^2=540$　8） $\dfrac{7!}{2!3!2!}\cdot(-1)^3=-210$　9） $\dfrac{6!}{3!2!1!}\cdot 2^2\cdot(-3)^1=-720$

確率　overview　答え

13. 1） $\dfrac{{}_6C_2\cdot{}_4C_1+{}_6C_3\cdot{}_4C_0}{{}_{10}C_3}=\dfrac{2}{3}$　2） $\dfrac{{}_5C_2\cdot{}_4C_1+{}_5C_3\cdot{}_4C_0}{{}_9C_3}=\dfrac{25}{42}$

14. $1-3\cdot(\dfrac{2}{3})^n+\dfrac{6}{3^n}$

15. 1) $(\dfrac{5}{6})^n$　2) $1-(\dfrac{5}{6})^n$　3) $(\dfrac{5}{6})^n-2\cdot(\dfrac{2}{3})^n+(\dfrac{1}{2})^n$

16. 1） $\dfrac{6!}{5!1!}\cdot(\dfrac{1}{2})^5\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{32}$　2） $\dfrac{6!}{4!2!}\cdot(\dfrac{1}{2})^4\cdot(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{15}{64}$　3） $1-\dfrac{3}{32}-\dfrac{1}{64}=\dfrac{57}{64}$

17. 1） $\dfrac{6!}{2!4!}\cdot(\dfrac{1}{3})^2\cdot(\dfrac{2}{3})^4=\dfrac{80}{243}$　2） $\dfrac{7!}{4!3!}\cdot(\dfrac{1}{2})^4\cdot(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{35}{128}$

「復元」と「非復元」（あるいは同時）の「違う」と「同じ」

赤球３個、白球４個の入っている袋から１個ずつ玉を取り出す試行を３回行う。
この試行を１回行うたびに、袋に取り出した玉を戻す（復元）か、戻さない（非復元）
かで確率の計算は違ってくる。その「違う」とともに「同じ」を探そう。

（例題 01）赤球３個、白球４個の入っている袋から１個ずつ玉を取り出す試行を３回行う。
この試行を１回行うたびに、**袋に取り出した玉を戻す（復元）**とき、以下の問いに答えよ。
1）取り出した玉の色が順に
　①　赤赤白　である確率を求めよ。
　②　赤白赤　である確率を求めよ。
　③　白赤赤　である確率を求めよ。
2）赤２個白１個が取り出される確率を求めよ。

（解答 01）

1）　①　$\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}=\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\frac{4}{7}$　②$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}=\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\frac{4}{7}$　③$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}=\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\frac{4}{7}$

2）$\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\frac{4}{7}$

（例題 02）赤球３個、白球４個の入っている袋から１個ずつ玉を取り出す試行を３回行う。
ただし、**取り出した玉は袋に戻さないで試行を続ける（非復元）**とき、以下の問いに答えよ。
1）取り出した玉の色が順に
　①　赤赤白　である確率を求めよ。
　②　赤白赤　である確率を求めよ。
　③　白赤赤　である確率を求めよ。
2）赤２個白１個が取り出される確率を求めよ。

（解答 02）

1）　①　$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}$　②$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}$　③$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}$　　（やはり①＝②＝③である）

2）$\frac{3!}{2!1!}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}$

赤赤白と取り出すときの（例題 01）と（例題 02）の違い

（例題 01）
取り出す時点の、袋の中の個数の組を（赤、白）と表すとき
１個目（3,4）→赤
２個目（3,4）→赤

から$\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{4}{7}$

（例題 01）
個数の組を（赤、白）と表すとき
１個目（3,4）→赤
２個目（2,4）→赤
３個目（1,4）→白
から$\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{4}{5}$

「同じ」なのは
・　確率は「赤赤白」「赤白赤」「白赤赤」の順序によらない。
・　「赤２回、白１回」の起こり方は$\dfrac{3!}{2!1!}$でこれも同じである。

（例題 03）赤球 3 個、白球 4 個の入っている袋から 1 個ずつ玉を取り出す試行を 5 回行うただし、取り出した玉は袋に戻さないで試行を続ける（非復元）とき、赤２個白 3 個が取り出される確率を求めよ。

（解答 03）
$$\frac{5!}{2!3!}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}$$

（例題 04）赤球 3 個、白球 4 個の入っている袋から 1 個ずつ玉を取り出す試行を 5 回行うただし、取り出した玉は毎回袋に戻して試行を続ける（復元）とき、赤２個白 3 個が取り出される確率を求めよ。

（解答 04）
$$\frac{5!}{2!3!}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}$$

（例題 05）10 本のくじがあり、そのうち 4 本が当りくじで、のこりははずれである。いま 3 本を順にくじを引いてそのうち 2 本が当たる確率を求めよ。
　また引いたくじは毎回元に戻すとしたら、その確率はどうなるか。
さらに、**同時に** 3 本を引いた場合はどうか。

（解答 05）
$$\frac{3!}{2!1!}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{3}{10}$$

ところで、$10\cdot 9\cdot 8=10^{(3)}$, $10\cdot 9=10^{(2)}$, ${}_{n}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{n}^{(\boldsymbol{r})}$ などと表すことにすると

非復元の場合は $\dfrac{3!}{2!1!}\cdot\dfrac{4^{(2)}\cdot 6^{(1)}}{10^{(3)}}$ 　　復元の場合は $\dfrac{3!}{2!1!}\cdot\dfrac{4^{2}\cdot 6^{1}}{10^{3}}$ 　となる。

（そっくりになってしまった。）

この書き方を取り入れると、${}_{n}C_{r}=\dfrac{n^{(r)}}{r^{(r)}}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ が成り立つ。

それでは、「**同時に**」引いた場合はどうなるか、

10 本から 3 本を引く、組合せは ${}_{10}C_{3}=\dfrac{10!}{3!7!}=120$ 通り

当りくじ 4 本から 2 本、はずれくじ 6 本から 1 本引く組合せは

${}_{4}C_{2}\cdot{}_{6}C_{1}=\dfrac{4!}{2!2!}\cdot\dfrac{6!}{1!5!}=36$ 通り

したがって、求める確率は、$\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$ 　となり、**非復元の場合**と**同じ**になる。

これは偶然ではない。「**同時に**」と書いてあっても、本当の「同時」は不可能に近い、
くじを引く場面をビデオで撮って、超スローモーションで再生してみれば僅かな時間差は検出される筈で、非復元の試行を「すばやく」行うのと同じことである。

数式で確認しておこう。

$$\frac{{}_{4}C_{2}\cdot{}_{6}C_{1}}{{}_{10}C_{3}}=\frac{4^{(2)}}{2^{(2)}}\cdot\frac{6^{(1)}}{1^{(1)}}\times\frac{3^{(3)}}{10^{(3)}}=\frac{3^{(3)}}{2^{(2)}\cdot 1^{(1)}}\cdot\frac{4^{(2)}\cdot 6^{(1)}}{10^{(3)}}=\frac{3!}{2!1!}\cdot\frac{4^{(2)}\cdot 6^{(1)}}{10^{(3)}}$$

一般の場合も数字が文字に変わるだけなので、これで十分一般的な証明になっている。

（例題 06）広島大 07 年

袋の中に、1 と書いた玉が 2 個、2 と書いた玉が m 個、3 と書いた玉が $(8-m)$ 個、合計 10 個入っている。ただし、$2 \leq m \leq 7$ とする。この袋から玉を 2 個取り出し、それらの玉に書かれた数の和を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　$S=4$　となる確率を求めよ。

(2)　S を 3 で割った余りが 2 である確率を求めよ。

(3)　S を 3 で割った余りの期待値 E を求めよ。

(4)　E を最大にする m の値とそのときの E の値を求めよ。

（解答 06）

	1 の個数	2 の個数	3 の個数	S の値	確率
イ	2	0	0	2	$\frac{2!}{2!0!0!}\cdot\frac{2\cdot 1}{10\cdot 9} = \frac{{}_2C_2\cdot{}_mC_0\cdot{}_{8-m}C_0}{{}_{10}C_2}$
ロ	1	1	0	3	$\frac{2!}{1!1!0!}\cdot\frac{2\cdot m}{10\cdot 9} = \frac{{}_2C_1\cdot{}_mC_1\cdot{}_{8-m}C_0}{{}_{10}C_2}$
ハ	1	0	1	4	$\frac{2!}{1!0!1!}\cdot\frac{2\cdot(8-m)}{10\cdot 9} = \frac{{}_2C_1\cdot{}_mC_0\cdot{}_{8-m}C_1}{{}_{10}C_2}$
ニ	0	2	0	4	$\frac{2!}{0!2!0!}\cdot\frac{m\cdot(m-1)}{10\cdot 9} = \frac{{}_2C_0\cdot{}_mC_2\cdot{}_{8-m}C_0}{{}_{10}C_2}$
ホ	0	1	1	5	$\frac{2!}{0!1!1!}\cdot\frac{m\cdot(8-m)}{10\cdot 9} = \frac{{}_2C_0\cdot{}_mC_1\cdot{}_{8-m}C_1}{{}_{10}C_2}$
ヘ	0	0	2	6	$\frac{2!}{0!0!2!}\cdot\frac{(8-m)\cdot(7-m)}{10\cdot 9} = \frac{{}_2C_0\cdot{}_mC_0\cdot{}_{8-m}C_2}{{}_{10}C_2}$

(1)　ハ＋ニ＝$\frac{m^2-5m+32}{90}$　　　(2)　イ＋ホ＝$\frac{-m^2+8m+1}{45}$

(3)　1×（1 の答）+2×（2 の答）＝$\frac{-m^2+9m+12}{30}$

(4)　$-m^2+9m+12=-(m-\frac{9}{2})^2+\frac{129}{4}$　より　$m=4,5$ のとき E は最大値　$\frac{16}{15}$　をとる。

2009.7.20