

## 第5問 解答例と解説

背理法を使う問題ですね。それと、数学的帰納法的な考え方も使う面白い問題です。

まず  $\tan 1^\circ$  が有理数であると仮定します。

すると、タンジェントの加法定理

$$\tan(n^\circ + 1^\circ) = \frac{\tan n^\circ + \tan 1^\circ}{1 - \tan n^\circ \tan 1^\circ}$$

により

$n = 1, 2, \dots, 59$  について

「 $\tan n^\circ$  が有理数なら  $\tan(n^\circ + 1^\circ)$  も有理数」  
が成り立ちます。

このことから

$\tan 1^\circ$  が有理数であれば

$\tan 2^\circ$ 、 $\tan 3^\circ$ 、 $\tan 4^\circ$ 、 $\dots$ 、 $\tan 60^\circ$  はすべて有理数  
ということになりますが、これは

「 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$  が無理数であること」に矛盾します。

したがって

「 $\tan 1^\circ$  は無理数でなければならない」という結論が得られました。