

第18問 解答例と解説

平方数の有名な性質として

「平方数を4で割った余りは0か1である」というのがあります。もっと詳しく言うと。

「偶数の2乗は4で割り切れ、奇数の2乗を4で割ると余りは1になる」ということになります。

何故でしょうか？

奇数は $2n-1$ ($n=1,2,3,\dots$) と表すことができますが、

$$(2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 4n(n-1) + 1$$

ですから、奇数の2乗を4で割った余りは必ず1です。

ところで、11、111、1111、……はどれも

$$(100 \text{ の倍数}) + 11 = (100 \text{ の倍数}) + 8 + 3$$

の形をしています。

100は4の倍数ですから、これらの数はどれも4で割ると3余る数だとわかりますから、

「この中に平方数は含まれていない。」

ということがわかります。