―――統計学、力学から重みの幾何学へ―――

1973 年　ランダウ・リフシッツ「力学」に刺激を受けて　大学１年

「中点の位置ベクトルは、2 点の位置ベクトルの平均であり、三角形の重心の位置ベクトルは３頂点の位置ベクトルの平均である」と言って公式を説明している方も結構居られるに違いない。かくいう僕もその一人である。それではなぜそのように説明をするのか。それは、そう説明した方が直感的にピンとくるだろうと考えられるからである。

ところが、教科書を見ると、平均という言葉がどこにも見当たらないだけでなく、重心という言葉を使っているにもかかわらず重みに関する表現はどこにも出てこない。むしろ、それを避けて、内分比、外分比だけで幾何学を構成しようとしているように見受けられる。

そこで僕は、むしろ重みの方を主役にして内分比、外分比を脇役にした幾何学を構成することはできないかと考え、以下のノートを作成した。バランス・メソッドとは、重みを主役にして幾何学を説明するということである。

平均とは、統計学の用語、重心とは力学の用語、それゆえバランス・メソッドはこの両者と幾何学とのアナロジーをもとに、考えなければならない。少々大風呂敷ではあるが、発想の原点から見ていただきたいと思う。

⑴　統計学

（２値データの統計）

いま、m_1 個のデータが x_1 という値をとり、m_2 個のデータが x_2 という値をとるとき、この $m_1+m_2\ (=M)$ 個のデータについて、次のことが成り立つ。

１）データの平均値 $\overline{x}$ は、

$$\overline{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2} \qquad （１．１）$$

で与えられる。いご、$f(x_1)$、$f(x_2)$ の平均を

$$\overline{f(x)}=\frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)}{m_1+m_2}$$

によって定義することとする。

ところで今、$\Delta x_1=x_1-\overline{x}$、$\Delta x_2=x_2-\overline{x}$ によって、各データ値と平均との差をあらわすと、（１．１）式より、

$$m_1(x_1-\overline{x})+m_2(x_2-\overline{x})=0$$

すなわち

$$m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 = 0 \qquad （１．２）$$

が成り立つ。

この式から、$|\Delta x_1| : |\Delta x_2| = m_2 : m_1$となるが、２値データの場合、各データ値と平均値とのずれが、もう一方のデータ値をとるデータ数に比例することを示している。

２）データの二乗の平均値$\overline{x^2}$は、

$$\begin{aligned}\overline{(x-\bar{x})^2} &= \overline{x^2 - 2x\bar{x} + \overline{x^2}} \\ &= \overline{x^2} - \bar{x}^2\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\overline{x^2} &= \bar{x}^2 + \overline{(x-\bar{x})^2} \\ &= \bar{x}^2 + \overline{\Delta x^2}\end{aligned}$$

が成り立つから、

$$\frac{m_1 {x_1}^2 + m_2 {x_2}^2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{m_1(x_1 - \bar{x})^2 + m_2(x_2 - \bar{x})^2}{m_1 + m_2} \qquad （１．３）$$

右辺の第二項$\overline{\Delta x^2}$は分散を表し、

$$\begin{aligned}\overline{\Delta x^2} &= \frac{m_1 \Delta {x_1}^2 + m_2 \Delta {x_2}^2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{\Delta x_1(-m_2\Delta x_2) + \Delta x_2(-m_1\Delta x_1)}{m_1 + m_2} \qquad (\because m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 = 0) \\ &= -\Delta x_1 \cdot \Delta x_2\end{aligned}$$

となる。

$$\overline{\Delta x^2} = |\Delta x_1||\Delta x_2|$$

$x_{12} = x_2 - x_1$とすると、$\Delta x_{12} = \Delta x_2 - \Delta x_1$、これと$m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 = 0$より$\Delta x_1$、$\Delta x_2$を消去すると、

$$\overline{\Delta x^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot {x_{12}}^2$$

となり、

$$\frac{m_1 {x_1}^2 + m_2 {x_2}^2}{m_1 + m_2} = \bar{x}^2 + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} {x_{12}}^2 \qquad （１．４）$$

（ｎ値データの統計）

以上で得られた結果を一般化することにしよう。$i=1,2,3,\cdots\cdots,n$ に対し、m_i 個のデータが値 x_i をとるとする。このとき、

１）データの平均値 $\overline{x}$ は、

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i} \qquad （１．５）$$

$\Delta x_i = x_i - \overline{x}$ とおくと、（１．５）より、

$$\overline{x}\sum_{i=1}^{n}m_i=\sum_{i=1}^{n}m_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-\overline{x})=0$$

となり、

$$\sum_{n}^{n}m_i\Delta x_i=0 \qquad （１．６）$$

２）データの二乗の平均値 $\overline{x^2}$ は、$\overline{x^2}=\overline{x}^2+\overline{(x-\overline{x})^2}$ より、

$$\overline{x^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i x_i{}^2}{\sum_{i=1}^{n}m_i}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}\right)^2+\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}m_i} \qquad （１．７）$$

右辺第二項（分散）を $\overline{x}$ を使わないで表しておこう。

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i{}^2}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}m_i m_j\Delta x_i{}^2}{\sum_{j=1}^{n}m_j\sum_{i=1}^{n}m_i}$$

$$
\begin{aligned}
分子 &= \sum_{i=j} m_i m_j \Delta x_i{}^2 + \sum_{i \neq j} m_i m_j \Delta x_i{}^2 \\
&= \sum_{i=j} m_i{}^2 \Delta x_i{}^2 + \sum_{i>j} m_i m_j \Delta x_i{}^2 + \sum_{i<j} m_i m_j \Delta x_i{}^2 \\
&= \left(\sum_{i=1} m_i \Delta x_i \right)^2 - \sum_{i<j} 2 m_i m_j \Delta x_i \Delta x_j + \sum_{i<j} m_i m_j \Delta x_j{}^2 + \sum_{i<j} m_i m_j \Delta x_i{}^2
\end{aligned}
$$

（１．６）式より第一項＝０となるから、

$$
\begin{aligned}
分子 &= \sum_{i<j} m_i m_j (\Delta x_j{}^2 + \Delta x_i{}^2 - 2\Delta x_j \Delta x_i) \\
&= \sum_{i<j} m_i m_j (\Delta x_j - \Delta x_i)^2
\end{aligned}
$$

ところで、
$$
\begin{aligned}
\Delta x_j - \Delta x_i &= (x_j - \bar{x}) - (x_i - \bar{x}) \\
&= x_j - x_i
\end{aligned}
$$

そこで $x_{ij} = x_j - x_i$ とおくことにより、分散は

$$
\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i<j} m_i m_j x_{ij}{}^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right)^2} \qquad （１．８）
$$

となる。したがって（１．７）式は、

$$
\overline{x^2} = \bar{x}^2 + \frac{\sum_{i<j} m_i m_j x_{ij}{}^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right)^2} \qquad （１．９）
$$

と変形されることがわかった。

（データ集団の統合）

２組のデータ集団 A_1、A_2 があり、今 A_1、A_2 を統合して A というデータ集団を作るとする。このとき、A_1、A_2、A それぞれのデータ数 M_1、M_2、M、平均値 $X_1, X_2, \overline{X}$、分散 $\sigma_1{}^2$、$\sigma_2{}^2$、σ^2 の間に成り立つ関係式を求めよう。

１）データ数　$M = M_1 + M_2$　（１．１０）

２）平均値　$\overline{X} = \dfrac{M_1 X_1 + M_2 X_2}{M_1 + M_2}$　（１．１１）

は明らかであろう。

３）分散を求めるため、Aのデータの２乗平均値$\overline{X^2}$を与えられた変数で表すことにする。

A_1、A_2、のデータの２乗平均値は、それぞれ$X_1{}^2+\sigma_1{}^2$、$X_2{}^2+\sigma_2{}^2$だから、

$$\overline{X^2}=\frac{M_1(X_1{}^2+\sigma_1{}^2)+M_2(X_2{}^2+\sigma_2{}^2)}{M_1+M_2} \qquad (1.\ 12)$$

$$\therefore \qquad \sigma^2=\overline{X^2}-\overline{X}^2$$

$$=\frac{M_1(X_1{}^2+\sigma_1{}^2)+M_2(X_2{}^2+\sigma_2{}^2)}{M_1+M_2}-\left(\frac{M_1X_1+M_2X_2}{M_1+M_2}\right)^2$$

$$=\frac{M_1\sigma_1{}^2+M_2\sigma_2{}^2}{M_1+M_2}+\frac{M_1M_2}{(M_1+M_2)^2}\cdot(X_2-X_1)^2 \qquad (1.13)$$

つまり、

（統合されたデータの分散）＝（分散の平均）＋（平均の分散）

が成立していることになる。また、（１．１０）より

$$M+(-M_2)=M_1 \qquad (1.\ 14)$$

（１．１１）より

$$M\overline{X}=M_1X_1+M_2X_2$$

$$X_1=\frac{M\overline{X}+(-M_2)X_2}{M+(-M_2)} \qquad (1.\ 15)$$

（１．１３）、（１．１５）より

$$\sigma_1{}^2=\frac{M\sigma^2+(-M_2)\sigma_2{}^2}{M+(-M_2)}+\frac{M\cdot(-M_2)}{(M-(-M_2))^2}\cdot(\overline{X}-X_2)^2 \qquad (1.\ 16)$$

したがって、データ集団から、ある部分を除いて新しいデータ集団をつくる際には、その部分のデータ集団のデータ数をマイナスにして統合と同じ操作をすればよい。

（2 次元のデータの統計）

$i=1,2,3,\cdots\cdots,n$に対し、m_i個のデータが$(x_i\ ,\ y_i)$という値をとるとき

１）データの平均値は、

$$\overline{(x\ ,\ y)} = (\overline{x}\ ,\ \overline{y}) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\ ,\ \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \right) \qquad （１．１７）$$

２）各成分の分散は、

$$\sigma_x{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i<j} m_i m_j x_{ij}{}^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2}$$

$$\sigma_y{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i (y_i - \overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i<j} m_i m_j y_{ij}{}^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^2} \qquad （１．１８）$$

ただし、$x_{ij} = x_j - x_i$、$y_{ij} = y_j - y_i$ である。

３）各データを xy 平面におき、$P_i(x_i\ ,\ y_i)$、$P_y(\overline{x}\ ,\ \overline{y})$ とする。P_i と P_y の距離を d_i とすると、

$$\begin{aligned} \overline{d^2} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \left\{ (x_i - \overline{x})^2 + (y_i - \overline{y})^2 \right\}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \\ &= \sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 \qquad （１．１９） \\ &= \frac{\sum_{i<j} m_i m_j \left| \overrightarrow{P_i P_j} \right|^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right)^2} \end{aligned}$$

４）共分散と相関係数

いま、n 組のデータ

$$\begin{aligned} \overline{(x-\overline{x})(y-\overline{y})} &= \overline{xy} - \overline{x}y + \overline{x}\,\overline{y} \qquad （１．２０） \\ &= \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y} \end{aligned}$$

を共分散といい、σ_{xy} で表す。

この場合、

$$\sigma_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}m_i} \qquad （１．２１）$$

ということになる。このとき、

$$\gamma=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \qquad （１．２２）$$

を相関係数と呼ぶ。

　ところで、今、tの二次関数

$$\begin{aligned}\overline{\left\{(x-\overline{x})+t(y-\overline{y})\right\}^2}&=\overline{(x-\overline{x})^2}+2t\overline{(x-\overline{x})(y-\overline{y})}+t^2\overline{(y-\overline{y})^2}\\&=\sigma_x{}^2+2t\sigma_{xy}+t^2\sigma_y{}^2\end{aligned} \qquad （１．２３）$$

を考えると、左辺は任意の実数tに対し、0以上の値をとるから、

$$\sigma_{xy}{}^2-\sigma_x{}^2\sigma_y{}^2\le 0 \qquad （１．２４）$$

が成り立つ。（１．２４）の両辺を$\sigma_x{}^2\sigma_y{}^2$（$\neq 0$のとき）で割ると、

$$\begin{aligned}&r^2-1\le 0\\&-1\le r\le 1\end{aligned}$$

が成立する。

　$r=\pm 1$のとき（１．２３）は$t=-\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y{}^2}$に対して０になる。（１．２３）の左辺は

$\sum_{i=1}^{n}m_i\left\{(x_i-\overline{x})+t(y_i-\overline{y})\right\}^2$であるから、このとき、$(x_i-\overline{x})-\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y{}^2}(y_i-\overline{y})=0$が各データについて成り立つ。

（相関係数の幾何学的解釈）

n 個のデータ　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$　に対し

$$\overrightarrow{\Delta x} = (x_1 - \overline{x}, x_2 - \overline{x}, \cdots, x_n - \overline{x})$$

$$\overrightarrow{\Delta y} = (y_1 - \overline{y}, y_2 - \overline{y}, \cdots, y_n - \overline{y})$$

とおくと、

x, y の相関係数は二つのベクトル $\overrightarrow{\Delta x}, \overrightarrow{\Delta y}$ のなす角 θ の余弦に等しい

すなわち

$$\gamma_{xy} = \cos\theta = \frac{\overrightarrow{\Delta x} \cdot \overrightarrow{\Delta y}}{\left|\overrightarrow{\Delta x}\right|\left|\overrightarrow{\Delta y}\right|}$$

⑵　力学

（2 質点の力学）

いま、質量 m_1 をもつ質点 P_1 の位置ベクトルを $\overrightarrow{x_1}$ とし、質量 m_2 をもつ質点 P_2 の位置ベクトルを $\overrightarrow{x_2}$ とする。このとき、

１）
$$m_1 \overrightarrow{P_g P_1} + m_2 \overrightarrow{P_g P_1} = \vec{0} \qquad （２．１）$$

を満たす点 $P_g(\overrightarrow{x_g})$ を 2 質点 P_1、P_2 の質量中心（または、加重重心）とよぶ。質量中心の位置ベクトル $\overrightarrow{x_g}$ は（２．１）より

$$m_1(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_g}) + m_2(\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_g}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{x_g} = \frac{m_1\overrightarrow{x_1} + m_2\overrightarrow{x_2}}{m_1 + m_2} \qquad （２．２）$$

で与えられる。

また、（２．１）式より、P_g は線分 P_1P_2 を $m_2 : m_1$ の比に内分する点であることがわかる。

ところで、質点 P_1 に加えられる力を $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_{21}}$ （$\overrightarrow{F_{21}}$ は質点 P_2 から受ける相互作用によるもの、$\overrightarrow{F_1}$ はそれ以外のもの）質点 P_2 に加えられる力を同様に $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_{12}}$ とすると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_{21}} &= m_1 \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{x_1} \\ \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_{12}} &= m_2 \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{x_2} \end{aligned} \qquad （２．３）$$

２式を加えると、（$\overrightarrow{F_{21}} + \overrightarrow{F_{12}} = \vec{0}$ 作用反作用の法則を考慮して）$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$、$M = m_1 + m_2$ とおくと、
$$\vec{F} = M \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{x_g}$$
が成り立つが、この式によって質量中心の意味が理解される。

すなわち、質点 P_1、P_2 は相互作用（衝突、万有引力など）によって複雑な運動をするかもしれないが、質量中心 P_g は、相互作用を除いた外力の総和 $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ のみによりその

運動を決定され、その運動は質量$M = m_1 + m_2$を持つ質点$P_g(\overrightarrow{x_g})$が力$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$を受けて運動している状態に等しいということである。

2） P_1、P_2、P_gの速度を$\overrightarrow{v_1} = \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{x_1}$、$\overrightarrow{v_2} = \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{x_2}$、$\overrightarrow{v_g} = \dfrac{d}{dt}\overrightarrow{x_g}$とおくと、（2．2）の両辺を$t$で微分することにより、

$$\overrightarrow{v_g} = \frac{m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2} \qquad （2．4）$$

運動エネルギーの合計は、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\left|\overrightarrow{v_1}\right|^2 + \frac{1}{2}m_2\left|\overrightarrow{v_2}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left|\overrightarrow{v_g}\right|^2 + \frac{1}{2}m_1\left|\overrightarrow{v_{g1}}\right|^2 + \frac{1}{2}m_2\left|\overrightarrow{v_{g2}}\right|^2 \end{aligned} \qquad （2．5）$$

（ただし$\overrightarrow{v_{g1}} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_g}$、$\overrightarrow{v_{g2}} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_g}$とする。）と表すことができる。（2．5）により、2質点の運動エネルギーは、質量中心に$m_1 + m_2$の質点を置いた場合の運動エネルギーと質量中心に対する各質点の相対運動のエネルギーの和として表された。

　ところで後者は、

$$\frac{1}{2}m_1\left|\overrightarrow{v_{g1}}\right|^2 + \frac{1}{2}m_2\left|\overrightarrow{v_{g2}}\right|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\left|\overrightarrow{v_{12}}\right|^2 \qquad （2．6）$$

（ただし$\overrightarrow{v_{12}} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$）と変形される。$\overrightarrow{v_{12}}$は質点$P_1$から見た$P_2$の相対速度であり、$\dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$を$P_1$、$P_2$の相対運動に対する換算質量とよぶ。

3）（2．3）の2式において、$\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_2} = \vec{0}$の場合、すなわち、$P_1$、$P_2$の相互作用のみで、外力の働いていないときは、$\vec{F} = \vec{0}$より

$$\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{x_g} = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{v_g} = \vec{0}$$

だから、$\overrightarrow{v_g}$は定ベクトルとなり、点P_gは等速度運動をする。また、（2．4）式より、2

質点の運動量$\overrightarrow{P_1} = m_1\overrightarrow{v_1}$、$\overrightarrow{P_2} = m_2\overrightarrow{v_2}$の和について

<<運動量の保存則>>

$$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{v_g} = \text{一定} \qquad （２．７）$$

が成り立つ。

再び（２．３）式に戻り、

$$\overrightarrow{F_{21}} = m_1 \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{F_{12}} = m_2 \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{x_2}$$

より

$$\overrightarrow{x_1} \times \overrightarrow{F_{21}} = m_1\overrightarrow{x_1} \times \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{x_2} \times \overrightarrow{F_{12}} = m_2\overrightarrow{x_2} \times \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{x_2}$$

として、辺辺加えると（×は外積)、

$$(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}) \times \overrightarrow{F_{21}} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{x_1} \times m_1 \frac{d}{dt}\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} \times m_2 \frac{d}{dt}\overrightarrow{x_2}\right)$$

ところで$\overrightarrow{F_{21}} // \overrightarrow{x_{21}}$とすると左辺は$\vec{0}$であるから、

$$\vec{l} = \overrightarrow{x_1} \times m_1\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{x_2} \times m_2\overrightarrow{v_2} = \text{一定} \qquad （２．８）$$

となる。$\overrightarrow{l_1} = \overrightarrow{x_1} \times m_1\overrightarrow{v_1}$、$\overrightarrow{l_2} = \overrightarrow{x_2} \times m_2\overrightarrow{v_2}$を質点$P_1$、$P_2$の角運動量といい、（２．８）式は、<<角運動量の保存則>>と呼ばれる。

（n質点の力学)

$i = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots, n$に対して、質量$m_i$をもつ質点$P_i$の位置ベクトルを$\overrightarrow{x_i}$とする。

このとき

１）$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{P_y P_i} = \vec{0}$を満たす点$P_g(\overrightarrow{x_g})$を質点系$\{P_i\}$の質量中心という。$\overrightarrow{x_g}$は

$$\overrightarrow{x_g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad （２．９）$$

により与えられる。

２）$\overrightarrow{v_i} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{x_i}$、$\overrightarrow{v_g} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{x_g}$ とおくと、

$$\overrightarrow{v_g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad （２．１０）$$

が成り立ち、系の運動エネルギーは

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left|\overrightarrow{v_i}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\left|\overrightarrow{v_g}\right|^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left|\overrightarrow{v_{gi}}\right|^2 \qquad （２．１１） \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\left|\overrightarrow{v_g}\right|^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sum_{i<j} m_i m_j \left|\overrightarrow{v_{ij}}\right|^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \end{aligned}$$

（ただし、$\overrightarrow{v_{gi}} = \overrightarrow{v_i} - \overrightarrow{v_g}$、$\overrightarrow{v_{ij}} = \overrightarrow{v_j} - \overrightarrow{v_i}$）となる。

$\overrightarrow{P} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_i} = \sum_{i1}^{n} m_i \overrightarrow{v_i} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\overrightarrow{v_g}$ を系の運動量、

$\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{x_i} \times \overrightarrow{P_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{x_i} \times m_i \overrightarrow{v_i}$ を系の角運動量といい

これらは系の外から力が作用しない限り定ベクトルである。　　　（２．１２）

（xy 平面上の剛体の回転運動）

質点系$\{P_i\}$（$i = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots, n$）において、任意の$i$、$j$ に対して点P_1、P_2の距離が変わらないとき、この質点系を剛体と呼ぶことにする。

この剛体が、固定軸ϕの周りに回転運動するときその角運動度の大きさω、P_iとϕとの距離をd_iとすると、運動エネルギーは

$$\begin{aligned} T &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i {d_i}^2\right)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i {d_i}^2\right)\omega^2 \end{aligned}$$

角運動量の大きさは

$$l = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i d_i^{\ 2} \right) \omega$$

と表すことができる。したがって、

$$I_\phi = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^{\ 2} \qquad （２．１３）$$

とおけば、

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad （２．１４）$$
$$l = I\omega$$

と、簡単に表すことができる。I_ϕ をこの系の ϕ のまわりの慣性モーメントという。

今、各 P_i を xy 平面上の質点、ϕ を xy 平面上と垂直であるとし、ϕ と xy 平面との交点を $P_\phi\left(\overrightarrow{x_\phi}\right)$ とすると、

$$\begin{aligned} d_i &= \left|\overrightarrow{P_\phi P_i}\right| \\ &= \left|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_\phi}\right| \end{aligned}$$

を代入して

$$\begin{aligned} I_\phi &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_\phi}\right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_g}\right|^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\left|\overrightarrow{x_\phi} - \overrightarrow{x_g}\right|^2 \end{aligned} \qquad （２．１５）$$

（２．１５）において 2 行目の第 1 項は

$$I_g = \sum_{i=1}^{n} m_i \left|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_g}\right|^2 = \frac{\sum_{i<j} m_i m_j \left|\overrightarrow{x_{ij}}\right|^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$
$$\overrightarrow{x_{ij}} = \overrightarrow{x_j} - \overrightarrow{x_i}$$

これは、重心 P_g を通り ϕ と平行な軸の周りの慣性モーメントであり、これは P_ϕ の位置に関係なく定数となる。第 2 項は、$\overrightarrow{x_\phi} = \overrightarrow{x_g}$ のとき、すなわち、P_ϕ が P_g と一致するときに最小値 0 となるので、

慣性モーメント I_ϕ は ϕ が系の質量中心 P_g を通るとき最小値 I_g をとる。

さらに言い換えれば、

質量中心とは、そのまわりの慣性モーメントを最小にする点である。

⑶　幾何学

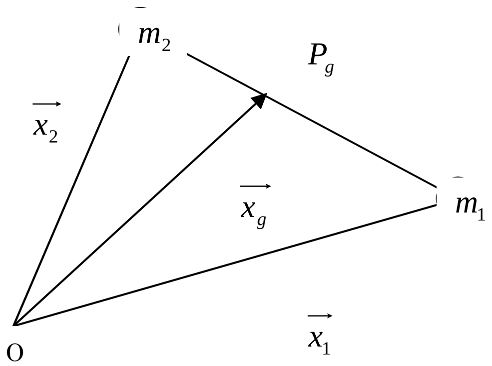
（スチュワートの定理）

それぞれ、m_1、m_2 の質量を持つ 2 質点 $P_1(\overrightarrow{x_1})$、$P_2(\overrightarrow{x_2})$ の質量中心 $P_g(\overrightarrow{x_g})$ は、同時に線分 P_1P_2 を $m_2 : m_1$ に内分する点という、幾何学的意味をもつ。

⑴、⑵で行った計算より、

$$m_1\left|\overrightarrow{x_1}\right|^2 + m_2\left|\overrightarrow{x_2}\right|^2 = (m_1+m_2)\left|\overrightarrow{x_g}\right|^2 + m_1\left|\overrightarrow{x_1}-\overrightarrow{x_g}\right|^2 + m_2\left|\overrightarrow{x_2}-\overrightarrow{x_g}\right|^2$$

$$= (m_1+m_2)\left|\overrightarrow{x_g}\right|^2 + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left|\overrightarrow{x_2}-\overrightarrow{x_1}\right|^2 \qquad （３．１）$$



すなわち

$$m_1OP_1^{\ 2} + m_2OP_2^{\ 2} = (m_1+m_2)OP_g^{\ 2} + m_1P_gP_1^{\ 2} + m_1P_gP_2^{\ 2}$$

$$= (m_1+m_2)OP_g^{\ 2} + \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}P_1P_2^{\ 2}$$

（３．２）

が成り立つ。

同じことを内分比で置き換えて表現したものが次のスチュワートの定理である。

$\triangle OAB$ の辺 AB を $m:n$ に内分した点を C とすると

$$nOA^2 + mOB^2 = (m+n)OC^2 + nCA^2 + mCB^2$$

$$= (m+n)OC^2 + \frac{mn}{m+n}AB^2 \qquad （３．３）$$

これがスチュワートの定理である。

特に $m=n=1$ とおくと C は辺 AB の中点となり、

$$OA^2 + OB^2 = 2OC^2 + CA^2 + CB^2 = 2OC^2 + \frac{1}{2}AB^2 \qquad （３．４）$$

となりパップスの定理が得られる。

パップスの定理において、さらに $OA = OB$ の場合、すなわち二等辺三角形の場合を考えると $OC \perp AB$ となり三平方の定理が得られる。

（質量中心と三角形）

１）右図のように、３質点 $P_1(\overrightarrow{x_1})$ 、$P_2(\overrightarrow{x_2})$、$P_3(\overrightarrow{x_3})$ 　　　図３－３

の作る三角形 $P_1P_2P_3$ を考える。

Q_1、Q_2、Q_3 はそれぞれ P_2 と P_3、P_3 と P_1、

P_1 と P_2 の質量中心、P_g は３質点 P_1、P_2、P_3 の

質量中心である。

P_g の位置ベクトル $\overrightarrow{x_g}$ は

$$\overrightarrow{x_g} = \frac{m_1\overrightarrow{x_1} + m_2\overrightarrow{x_2} + m_3\overrightarrow{x_3}}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(m_1 + m_2)\dfrac{m_1\overrightarrow{x_1} + m_2\overrightarrow{x_2}}{m_1 + m_2} + m_3\overrightarrow{x_3}}{(m_1 + m_2) + m_3}$$

$$= \frac{m_1\overrightarrow{x_1} + (m_2 + m_3)\dfrac{m_2\overrightarrow{x_2} + m_3\overrightarrow{x_3}}{m_2 + m_3}}{m_1 + (m_2 + m_3)} \qquad (3.\ 5)$$

$$= \frac{m_2\overrightarrow{x_2} + (m_1 + m_3)\dfrac{m_1\overrightarrow{x_1} + m_3\overrightarrow{x_3}}{m_1 + m_3}}{m_2 + (m_3 + m_1)}$$

となり、

$$Q_3P_1 : Q_3P_2 = m_2 : m_1 \qquad P_gP_1 : P_gQ_1 = m_1 : (m_2 + m_3)$$

$$Q_1P_2 : Q_3P_3 = m_3 : m_2 \qquad P_gP_2 : P_gQ_2 = m_2 : (m_3 + m_1) \qquad (3.\ 6)$$

$$Q_2P_3 : Q_2P_1 = m_1 : m_3 \qquad P_gP_3 : P_gQ_3 = m_3 : (m_1 + m_2)$$

が成り立つ。

（３．６）で与えられる６組の内分比のうち２組が既知とすると、$m_1 : m_2 : m_3$ が決まり、他の４組の内分比がわかる。

２）質量中心 P_g と三角形の３頂点 P_1、P_2、P_3 を　　　図３－４

結ぶ線分は、三角形を３つの部分に分けるが、その
面積比は

$$S_1 : S_2 : S_3 = m_1 : m_2 : m_3 \qquad （３．７）$$

で与えられる。

特に、P_g が△ $P_1P_2P_3$ の重心に一致するときは

$m_1 : m_2 : m_3 = 1:1:1$ だから、３つの面積は等しい。
これは図３－３と関係式（３．６）から明らかであろう。

例えば、図３－５で点 P が△ ABC の内心であ　　　図３－５
るとき、内接円の半径を r とすると△ PBC 、△ PCA

△ PAB の面積はそれぞれ $\frac{1}{2}ar$ 、$\frac{1}{2}br$ 、$\frac{1}{2}cr$ となり、

その比は $a:b:c$ である。したがって P の位置ベクトル

$\vec{x}$ は、

$$\vec{x} = \frac{a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}}{a+b+c} \qquad （３．８）$$

となる。

３）　（３．５）式より、P_g、P_1、P_2、P_3 について

$$m_1(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_g}) + m_2(\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_g}) + m_3(\overrightarrow{x_3} - \overrightarrow{x_g}) = \vec{0}$$

すなわち　$$m_1\overrightarrow{P_gP_1} + m_2\overrightarrow{P_gP_2} + m_3\overrightarrow{P_gP_3} = \vec{0} \qquad （３．９）$$

が成り立つ。

したがって、任意の点 $P(\vec{x})$ について

$$\begin{aligned}
&m_1(\overrightarrow{x_1} - \vec{x}) + m_2(\overrightarrow{x_2} - \vec{x}) + m_3(\overrightarrow{x_3} - \vec{x}) \\
&= m_1(\overrightarrow{x_g} - \vec{x}) + m_2(\overrightarrow{x_g} - \vec{x}) + m_3(\overrightarrow{x_g} - \vec{x}) + m_1(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_g}) + m_2(\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_g}) + m_3(\overrightarrow{x_3} - \overrightarrow{x_g}) \\
&= (m_1 + m_2 + m_3)(\overrightarrow{x_g} - \vec{x})
\end{aligned}$$

すなわち

$$m_1\overrightarrow{PP_1}+m_2\overrightarrow{PP_2}+m_3\overrightarrow{PP_3}=(m_1+m_2+m_3)\overrightarrow{PP_g} \qquad （３．１０）$$

が成り立つ。

４）　チェバの定理、メネラウスの定理

（３．６）から、

$$\frac{Q_3P_2}{Q_3P_1}\cdot\frac{Q_1P_3}{Q_1P_2}\cdot\frac{Q_2P_1}{Q_2P_3}=\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{m_2}{m_3}\cdot\frac{m_3}{m_1}=1 \qquad \langle\text{チェバの定理}\rangle \qquad （３．１１）$$

$$\frac{P_2P_3}{Q_1P_3}\cdot\frac{P_gQ_1}{P_gP_1}\cdot\frac{Q_3P_1}{Q_3P_2}=\frac{m_2+m_3}{m_2}\cdot\frac{m_1}{m_2+m_3}\cdot\frac{m_2}{m_1}=1 \qquad \langle\text{メネラウスの定理}\rangle \qquad （３．１２）$$

が成り立つことがわかる。

５）　スチュワートの定理の拡張

⑴、⑵と同様の計算によって、

$$m_1P_gP_1^{\ 2}+m_2P_gP_2^{\ 2}+m_3P_gP_3^{\ 2}=\frac{m_1m_2P_1P_2^{\ 2}+m_2m_3P_2P_3^{\ 2}+m_3m_1P_3P_1^{\ 2}}{m_1+m_2+m_3} \qquad （３．１３）$$

が成り立つ。特にP_gが△$P_1P_2P_3$の重心のとき

$$P_gP_1^{\ 2}+P_gP_2^{\ 2}+P_gP_3^{\ 2}=\frac{P_1P_2^{\ 2}+P_2P_3^{\ 2}+P_3P_1^{\ 2}}{3}$$

となる。さらに、任意の点Pについて

$$\begin{aligned}m_1PP_1^{\ 2}+m_2PP_2^{\ 2}+m_3PP_3^{\ 2}&=(m_1+m_2+m_3)PP_g^{\ 2}+m_1P_gP_1^{\ 2}+m_2P_gP_2^{\ 2}+m_3P_gP_3^{\ 2}\\&=(m_1+m_2+m_3)PP_g^{\ 2}+\frac{m_1m_2P_1P_2^{\ 2}+m_2m_3P_2P_3^{\ 2}+m_3m_1P_3P_1^{\ 2}}{m_1+m_2+m_3}\end{aligned}$$

（３．１４）

が成り立つ。

（３．１４）は、２点間の距離の平方のみで表されているから、空間でも成立する。