

第 26 問 解答例と解説

$$\alpha + \beta = 4 \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = 2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\alpha^2 = 4\alpha - 2 \cdots \textcircled{3}$$

$$\beta^2 = 4\beta - 2 \cdots \textcircled{4}$$

③+④より

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4(\alpha + \beta) - 4 = 12$$

となり、 $n=1, 2$ のとき成立することがわかります。

ところで③④から

$$\alpha^{k+2} = 4\alpha^{k+1} - 2\alpha^k \cdots \textcircled{5}$$

$$\beta^{k+2} = 4\beta^{k+1} - 2\beta^k \cdots \textcircled{6}$$

が成り立ちます

⑤+⑥より

$$(\alpha^{k+2} + \beta^{k+2}) = 4(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) - 2(\alpha^k + \beta^k) \cdots \textcircled{7}$$

式⑦から、 $n=k, k+1$ のとき成り立てば、 $n=k+2$ のときも成り立つことが言えますね。

したがって、すべての自然数 n について

$\alpha^n + \beta^n$ が 4 の倍数であることがわかった。