

第 30 問 解答例と解説

$$a+b=2 \cdots \textcircled{1}$$

$$a^2+b^2=16 \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{より } 2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=-12$$

$$ab=-6$$

このことから

a, b は 2 次方程式

$$x^2-2x-6=0 \text{ の 2 解であり。}$$

$$a^2-2a-6=0, b^2-2b-6=0 \text{ が成り立つ。}$$

ここで、 $p_n = a^n + b^n$ で与えられる数列 $\{p_n\}$ を考えると

$$p_{n+2}-2p_{n+1}-6p_n = a^n(a^2-2a-6)+b^n(b^2-2b-6)=0$$

$$p_{n+2} = 2p_{n+1} + 6p_n \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ、(p_n, p_{n+1} が整数ならば p_{n+2} も整数であることはこの時点で明らか) さらに、

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{ より } p_1 = 2, p_2 = 16, p_3 = 44$$

$\textcircled{3}$ より p_n, p_{n+1} と 2 個連続して 4 の倍数が続けば、その次の項 p_{n+2} も 4 の倍数になるから、 p_4 以降はすべて 4 の倍数である。以上より、 n を 2 以上の整数とするとき、

$a^n + b^n$ は 4 で割り切れる整数である。