フィボナンチャッテ数列　　by　u1248

「フィボナッチ数列」という有名な数の列（数列）があります。

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,……

というふうに（といっても、規則がわからないと、無意味な数の列ですね）
最初の２つの数が１で、それから先はその前の２数を足した数が続いています。
数学ではこのように、数が並んだものを「数列」といっています。
フィボナッチ数列には面白い性質がいろいろあり、それだけで一冊の本が書けるくらいです。さらに、「ダ・ヴィンチ・コード」の中で重要な役割を演じたこともあり、WEB 上で「フィボナッチ数列」を検索すれば１０万件以上の記事があるはずです。

ここでは、最近気がついたフィボナッチ数列のある性質について話したいと思います。

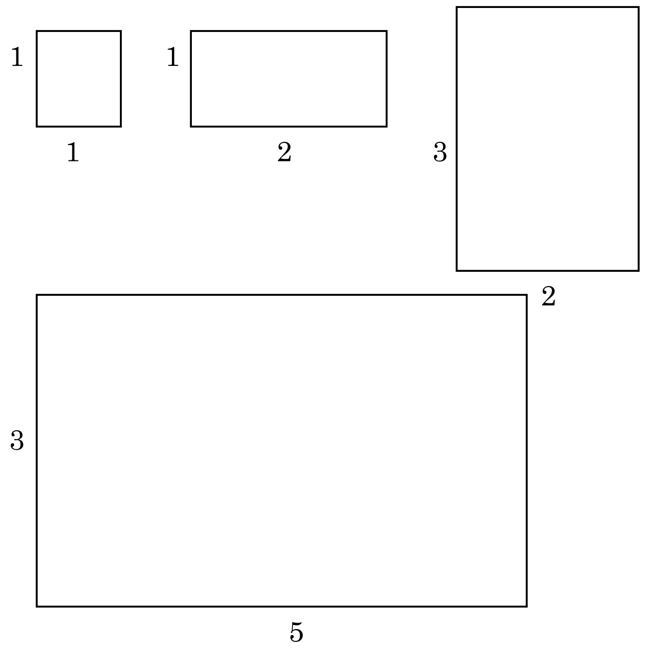
フィボナッチ数列　**1,　1,　2,　3,　5,　8,　13,　21,　34,　55,**　…

の隣りあう２数の積　1　2　6　15　40　104　273　701　1870
を最初から順に足してみると

$1+2=3=2^2-1$
$1+2+6=9=3^2$
$1+2+6+15=24=5^2-1$
$1+2+6+15+40=64=8^2$
$1+2+6+15+40+104=168=13^2-1$
$1+2+6+15+40+104+273=441=21^2$

これだけ見ればどんな性質かわかりますね。

何故、このような性質が成り立つのでしょう？
実は、小学生でも簡単にわかる説明のしかたがあります。

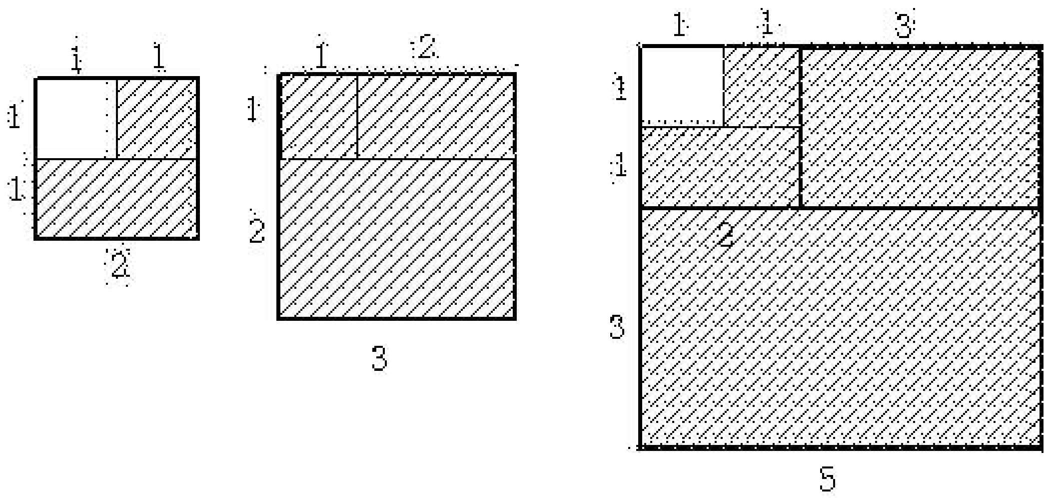


まず、隣接２項の積を図のような長方形の面積だと考えてください。これらを使って

$1\times1+1\times2=2^2-1$
$1\times1+1\times2+2\times3=3^2$
$1\times1+1\times2+2\times3+3\times5=5^2-1$

を説明してください。

次のページを見るの、ちょっと我慢して考えてね。



左から順に

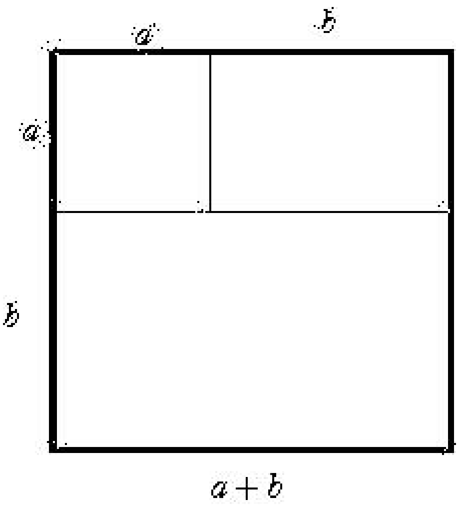
$1\times1+1\times2=2^2-1$

$1\times1+1\times2+2\times3=3^2$

$1\times1+1\times2+2\times3+3\times5=5^2-1$

の説明です。

これらはどれも、



数式で表すと

$$a^2+ab+b(a+b)=(a+b)^2$$

　この図が示す方法で、1 辺の長さが a の正方形から、1 辺の長さが $a+b$ の正方形をつくることができるという共通の原理からなりたっています。

　したがって、フィボナッチ数列ではどこまでいってもこのような性質をもっていることが理解できます。

$1\times1+1\times2=2^2-1$ 　　を示す図に、この操作をして

$1\times1+1\times2+2\times3+3\times5=5^2-1$ 　が

また

$1\times1+1\times2+2\times3=3^2$ 　　を示す図に、この操作をして

$1\times1+1\times2+2\times3+3\times5+5\times8=8^2$ 　が

それぞれ理解できます。

このことは、どこまでも無限に行うことできるのです。

このように､無限個の数式がなりたつことを､いっぺんに理解することができるのが数学のすごいところです。

（いまやって見せた方法を数学的帰納法といいます。）

フィボナンチャッテ数列

ところで、次の数列を見てください。

例 1　1,　1,　3,　4,　2,　6,　1,　7,　－2,　5

これは、フィボナッチ数列ではありませんね。
最初の 2 項が 1 というところは同じですが、
3 項目は 3 で、これは前 2 項の和になっていません。
でも 4 項目は 4＝1＋3　でこれは前の 2 項の和になっています。
このように、3 項目以降を
「最初の 2 項が 1 でそこから先は、奇数番目の項はどんな数でもよい（虚数でもよい）が、偶数番目の項は直前の 2 項の和になっている数列」というのを私は考えてみました。そして、これを、「フィボナンチャッテ数列 1」と呼ぶことにしました。
そして「フィボナンチャッテ数列 2」は
「最初の 2 項が 1 でそこから先は、偶数番目の項はどんな数でもよい（虚数でもよい）が、奇数番目の項は直前の 2 項の和になっている数列」とします。次の例 2 にあげた数列がそうです。

例 2　1,　1,　2,　5,　7,　-3,　4,　-2,　2,　1

さて、これがどんな意味を持つのか？
それぞれの例について、フィボナッチ数列と同じことをやってみます。

例 1　1,　1,　3,　4,　2,　6,　1,　7,　－2,　5
その
隣接 2 項の積　1　3　12　8　12　6　7　－14　－10

これを次々加えると

$1 = 1^2$
$1\times1+1\times3 = 4 = ?$
$1\times1+1\times3+3\times4 = 16 = 4^2$
$1\times1+1\times3+3\times4+4\times2 = 24 = ?$
$1\times1+1\times3+3\times4+4\times2+2\times6 = 36 = 6^2$
$1\times1+1\times3+3\times4+4\times2+2\times6+6\times1 = 42 = ?$
$1\times1+1\times3+3\times4+4\times2+2\times6+6\times1+1\times7 = 49 = 7^2$
$1\times1+1\times3+3\times4+4\times2+2\times6+6\times1+1\times7+7\times(-2) = 35 = ?$
$1\times1+1\times3+3\times4+4\times2+2\times6+6\times1+1\times7+7\times(-2)+(-2)\times5 = 25 = 5^2$

このように、交互にフィボナッチ数列と同じ性質が現れます。

例２　1,　1,　2,　5,　7,　−3,　4,　−2,　2,

その

隣接２項の積　1　2　10　35　−21　−12　−8　−4

これを次々加えると

$1\times1=1^2$

$1\times1+1\times2=3=2^2-1$

$1\times1+1\times2+2\times5=13=?$

$1\times1+1\times2+2\times5+5\times7=48=7^2-1$

$1\times1+1\times2+2\times5+5\times7+7\times(-3)=27=?$

$1\times1+1\times2+2\times5+5\times7+7\times(-3)+(-3)\times4=15=4^2-1$

$1\times1+1\times2+2\times5+5\times7+7\times(-3)+(-3)\times4+4\times(-2)=7=?$

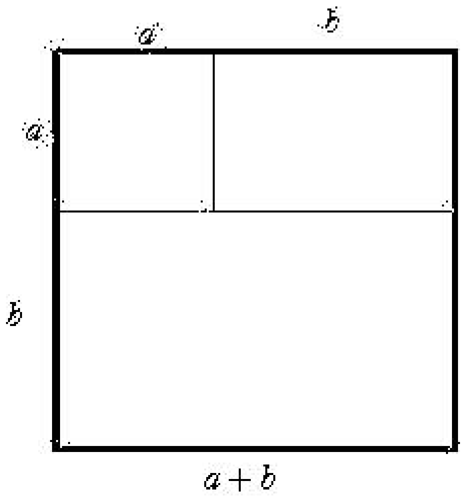
$1\times1+1\times2+2\times5+5\times7+7\times(-3)+(-3)\times4+4\times(-2)+(-2)\times2=3=2^2-1$

なぜ、こんな性質が成り立つのかわかりますか？

フィボナッチ数列と同じ原理ですね。

また、途中で負の数が出現しても大丈夫なのは、

前に示した図



を数式で表現すると

$a^2+ab+b(a+b)=(a+b)^2$

となりますが、

　図のほうのa,bは正の数でなければなりませんが、

数式のほうでは、どんな数でも成立するからです。

最後にフィボナンチャッテ数列１の例をいくつかあげておきましょう。

例 3

(1)　1 , 1 , 1 , 2 , 1 , 3 , 1 , 4 , $\cdots$, $n-1$, 1 , n

から

$$1+1+2+2+3+3+4+4+\cdots+(n-1)+(n-1)+n=n^2$$

両辺に n を加えて

$$2(1+2+3+4+\cdots+n)=n(n+1)$$

したがって

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) 1 , 1 , 1 , 2 , 2 , 4 , 4 , 8

から

$$1+1+2+4+8+16+32=8^2$$

両辺から 1 を引いて

$$1+2+4+8+16+32=64-1$$

追加

フィボナッチ数列　1,　1,　2,　3,　5,　8,　13,　21,　34,　55,　$\cdots$

には次の有名な性質があります。

「連続した 3 項の真ん中の 2 乗と両端の積の差は常に 1 である」

$1^2=1\times2-1$, $2^2=1\times3+1$, $3^2=2\times5-1$, $5^2=3\times8+1$, $8^2=5\times13-1$

このことを説明できますか？