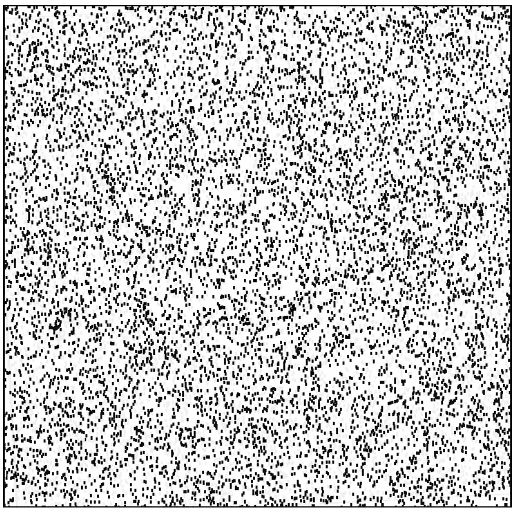
不動点を見せる

二項間漸化式の授業を行なうにあたって、ぜひともやっておきたいことがあります。それは、不動点というものを実際に目で見える形で生徒に体験させることです。それも、できるだけドラマチックな演出でできればいいと思います。

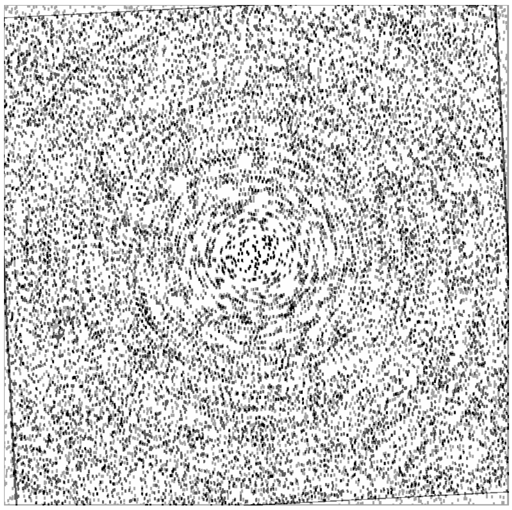
このことについては、雑誌「数学セミナー」（2002.2，1982.8）で大阪経済大学の西山豊さんがランダム･ドットパターンを使った見事なデモンストレーションを行なわれておりますし、不動点を求める作図法（西山の定理）も示しておられますので、それについて紹介したいと思います。

まず、正方形のランダム･ドット･パターン（図 1 のように、正方形の内部に点をランダムに打ったもの）を OHP シートに 2 枚コピーしておきます。

【図 1】



【図 2】



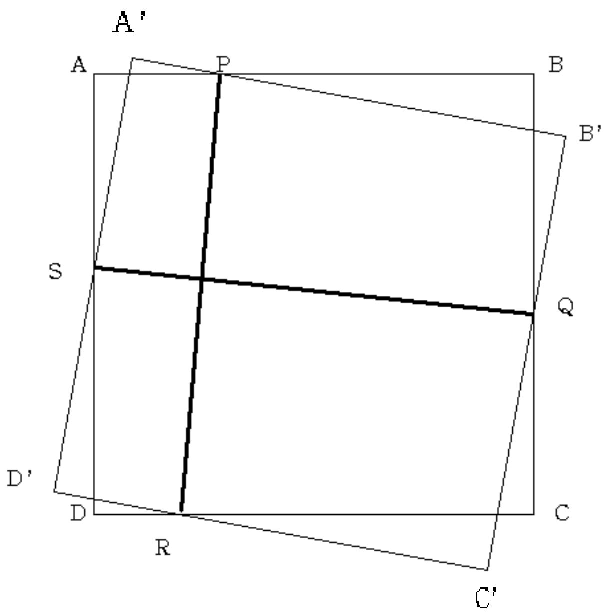
2 枚を完全に重ねておいて、このうち 1 枚を少し回転させながらずらしてみると（図 2）渦巻き状の模様が見えてきます。この渦巻きの中心になっている点が不動点です。

このように合同な図形を移動（平行移動以外）するとき、不動点が存在することがわかります。移動のさせ方によっては両方の図形の内部に不動点がくるようにすることができます。

実は合同な図形への、平行移動以外の任意の移動は定点の周りのただひとつの回転に一致することが知られています。この定点が不動点になっているのです。長方形が合同な長方形に移動する場合の不動点の求め方を示したものとして、「西山の定理」というのがあります。

【図３】に正方形の場合の求め方を示しておきました。長方形の場合も同じにできます。

【図 3】



【図 3】の直線 PR、QS の交点が不動点（あるいは回転の中心）になります。

何故これで不動点が求められるのか、ぜひ考えてみてください。

証明はいろいろ考えてみましたが、文章にすると難しく感じられるかもしれません。目の前で実際に見せながらやると納得すると思いますが。

西山氏自身の証明は、数学セミナー1982 年 2 月号に載っているらしい。誰かバックナンバーを持っていたら見せていただきたいのだが。