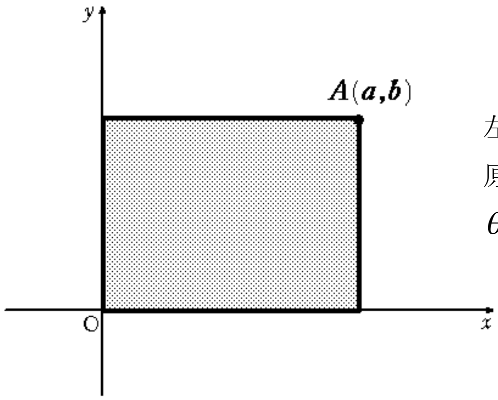
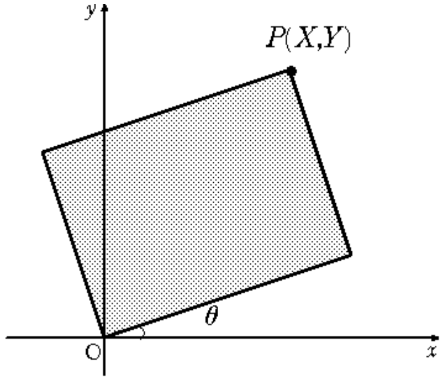
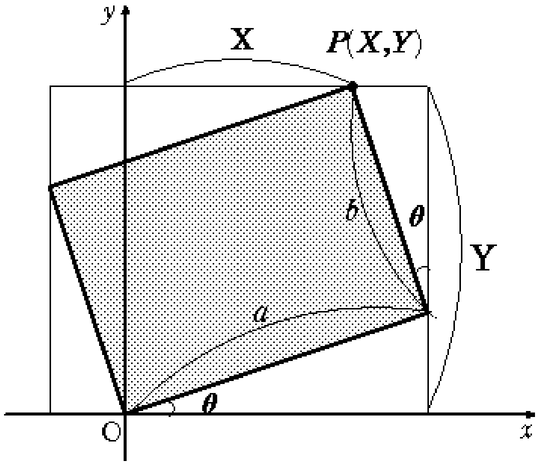
三角関数の加法定理について



左図の長方形を
原点Oのまわりに
θ だけ回転する。
　→　右図



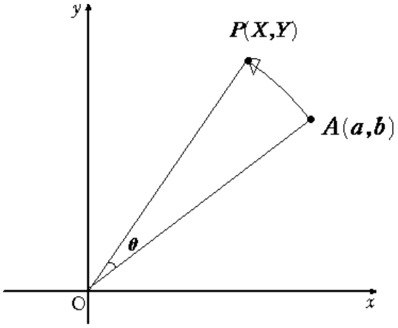


このとき左図にしたがい、
X, Y を a, b, θ で表せ。

回転公式

$X =$

$Y =$



この公式を使えば、座標平面上の任意の点を
原点のまわりに θ だけ回転した、移り先の点の
座標を求めることができる。

練習１　　点(a,b) を原点のまわりにθ だけ回転すると点(X,Y)に移るとき
次のθ の値に対して(X,Y)をa,bで表せ。

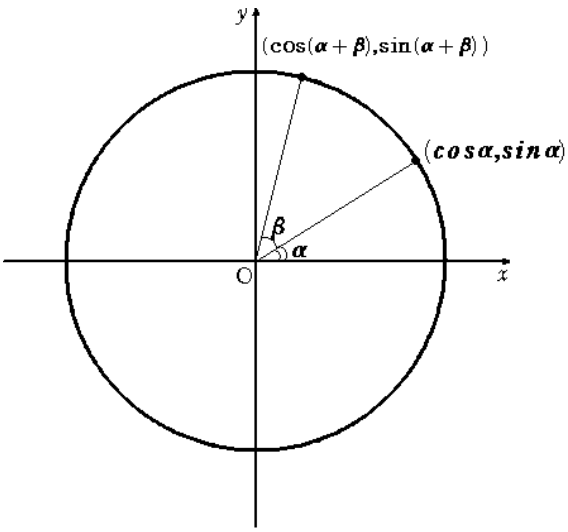
1）$\theta = 90^\circ$

2）$\theta = 120^\circ$

3）$\theta = 135^\circ$

4）$\theta = 300^\circ$

練習２　原点を中心とする単位円周上の点$(\cos\alpha, \sin\alpha)$を原点のまわりにβだけ回転すると点($\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$)に移る。



このことを用いて
$\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ を
$\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ で表せ。

$$\sin(\alpha+\beta) =$$

$$\cos(\alpha+\beta) =$$

加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+ \qquad \cdots ①$$
$$\sin(\alpha-\beta)= \qquad \cdots ②$$
$$\cos(\alpha+\beta)=co\alpha\cos\beta- \qquad \cdots ③$$
$$\cos(\alpha-\beta)= \qquad \cdots ④$$

（倍角公式）

$\sin 2\alpha =$

$\cos 2\alpha =$

$=$ $(\sin\alpha$で表せ$)$ ・・・⑤

$=$ $(\cos\alpha$で表せ$)$ ・・・⑥

（半角公式）

⑤⑥から

$\sin^2\alpha =$ （cos2αで表す）

$\cos^2\alpha =$ （cos2αで表す）

（和積公式）

①＋②　、①－②　、③＋④　、③－④　より

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=$

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=$

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=$

$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=$

ここで

$\alpha+\beta=A$

$\alpha-\beta=B$

とおくと

$\alpha=$　　　　　　　　　　$\beta=$

だから

$\sin A+\sin B=$

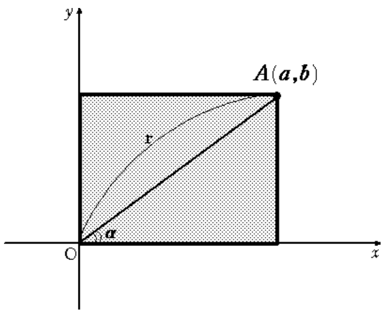
$\sin A-\sin B=$

$\cos A+\cos B=$

$\cos A-\cos B=$

（合成公式）

$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式は、



左図のように、点 $A(a,b)$ を座標平面に描いて、

点 A と原点との距離　$OA=r$

OA が x 軸となす角 α （反時計廻りに測る）

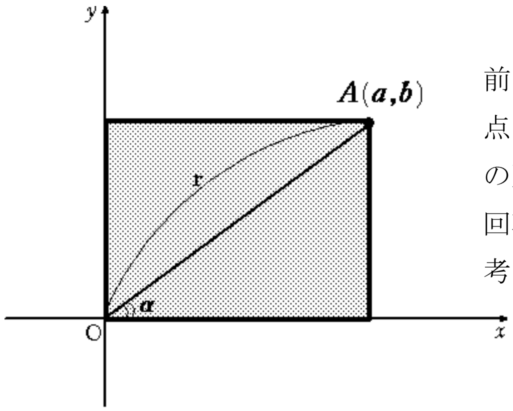
を求めることによって

$$a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$$

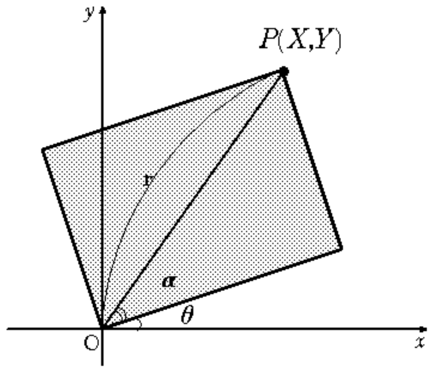
と変形することができる。

右辺のように変形すると、θ が１つの項にのみ現れるので θ が変化したときの式の、値の変化を調べるのに適している。

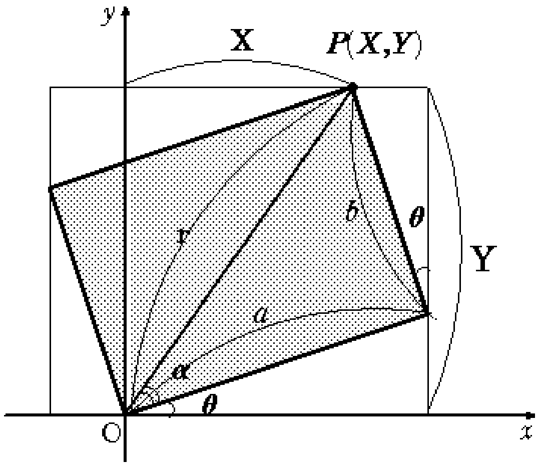
それでは、なぜこの公式が成り立つのか考えてみよう。



前と同じく
点Aを原点
の廻りにθだけ
回転した点Pを
考える。



右側の図から点Pの座標は、$(X,Y)=(r\cos(\theta+\alpha), r\sin(\theta+\alpha))$である。
一方



左図より

$X = a\cos\theta - b\sin\theta$
$Y = a\sin\theta + b\cos\theta$
であるとわかる。

以上から、

$$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$$

$$a\cos\theta - b\sin\theta = r\cos(\theta+\alpha)$$

が得られた。

（ $\tan$ の加法定理）

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

右辺の分母分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割ってみると

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

が得られる。

$\tan(-\beta)=-\tan\beta$ 　であるから

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan\{\alpha+(-\beta)\}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

となる。

（直線のなす角）

$\tan$ の加法定理を使う問題で、しっかりおさえておきたいものは、

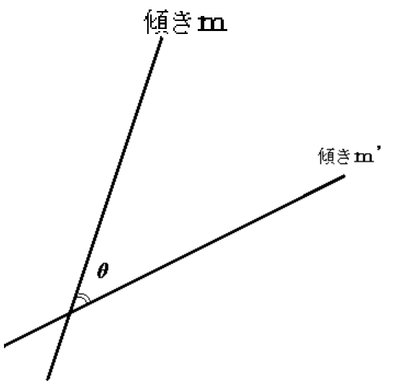
「２直線の傾きから、そのなす角を求める。」

問題である。

座標が与えられた図形で、角を求めることが要求されているときは

たいてい「$\tan$ の加法定理」を使うことでうまくゆく。

傾き m , m' の２直線のなす角 θ $(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$ は



公式　$\tan\theta=\left|\dfrac{m-m'}{1+mm'}\right|$ 　…①

ただし　$mm'\neq-1$

$mm'=-1$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

を満たす

この式を　公式　　　　$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

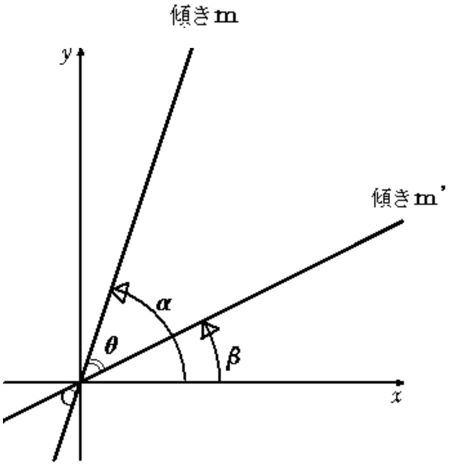
から導いてみよう。

２直線のなす角はその傾きだけで決まるから、

２直線、$y=mx$ ・・・①

　　　　$y=m'x$ ・・・②

のなす角を求めれば十分である。



①②と x 軸とのなす角を図のように

それぞれ α , β とすると

$m=\tan\alpha$, $m'=\tan\beta$

すると

$\theta=\alpha-\beta$ は

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$

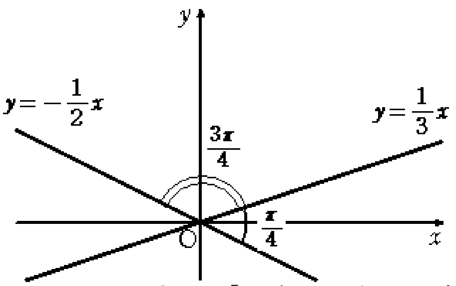
$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m-m'}{1+mm'}\quad\cdots②$$

　をみたす

　ところで、①の右辺には絶対値記号があるのに、②ではそれがない。

たとえば、$m=-\dfrac{1}{2}$, $m'=\dfrac{1}{3}$ のとき

②を使うと、　$\tan\theta=-1$　という結果が得られる。



この条件を満たす角 θ は $\dfrac{3\pi}{4}$ である

しかし、「２直線のなす角」というのは

２直線が交差してできる２つの角のうち

小さいほう（正確には大きくないほう）

の角の大きさを表す。

だから、この場合の正解は $\dfrac{\pi}{4}$ である。

それでは、つねに「小さいほう」の角を求めるためにはどうすれば良いか？

右辺に絶対値記号をつけておけば良いのである。

　①②ともに　$1+mm'=0$ すなわち　$mm'=-1$ のときは、右辺が値を持たない。

しかし、このとき、２直線は垂直だから $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ である。