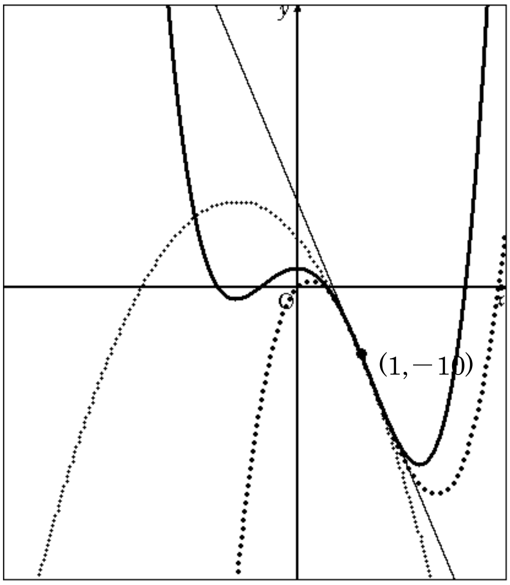
$(x-\alpha)^{m+1}$ で割った余りから近似式へ

イ　ロ



ハ　　　　ニ

上のグラフの曲線は、x の 4 次式

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+3$

に対して、

イ．　$y=f(x)$

ロ．　$y=$（ $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余り）

$=-24x+14=g_1(x)$

ハ．　$y=$（ $f(x)$ を $(x-1)^3$ で割った余り）

$=-6x^2-12x+8=g_2(x)$

ニ．　$y=$（ $f(x)$ を $(x-1)^4$ で割った余り）

$=8x^3-30x^2+12x=g_3(x)$

のグラフです。（実際に割り算してみてください）

ロ、ハ、ニはいずれも、点 $(1,-10)$ でイに接し、この点の近くでは、ロ $\to$ ハ $\to$ ニの順で徐々にイのグラフに近づいてゆく様子が窺われる。

実際、$x=1$ 近くでの各関数の値を計算してみると

x	$f(x)$	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$
0.9	−7.6677	−7.6	−7.66	−7.668
1.1	−12.4517	−12.4	−12.46	−12.452
1.2	−14.9712	−14.8	−15.04	−14.976

$x=1\pm0.1$ では $g_1(x)$ は 0.1 程度、$g_2(x)$ は 0.01 程度、$g_3(x)$ は 0.001 程度の誤差ですね。

それでは、何故誤差が小さくなってゆくかということなのですが、$g_2(x)$，$g_3(x)$ の場合で考えてみましょう。

$f(x)-g_2(x)=(x-1)^3(3x+5)$

$f(x)-g_3(x)=(x-1)^4\cdot3$

この右辺の値が誤差になります。

$x=1\pm0.1$ のときの右辺の値は

それぞれ、$0.001\cdot(8\pm0.3)$, $0.0001\cdot3$ となり

$(x-1)$ の次数が高い方が誤差が小さいことがわかる。

ちなみに $(x-1)^5$ で割った余り $g_4(x)$ は $f(x)$ 自身で、当然誤差はいたるところ０となる。

さて、ここで、 $f(x)$ を 4 次式として次のことを考える。

$f(x)$ を $(x-\alpha)$ で割った商を $Q_1(x)$ 余りを a_0 とすると

$f(x)=(x-\alpha)Q_1(x)+a_0\cdots$①　（$Q_1(x)$ は 3 次）

$Q_1(x)$ を $(x-\alpha)$ で割った商を $Q_2(x)$ 余りを a_1 とすると

$Q_1(x)=(x-\alpha)Q_2(x)+a_1\cdots$②　（$Q_2(x)$ は 2 次）

$Q_2(x)$ を $(x-\alpha)$ で割った商を $Q_3(x)$ 余りを a_2 とすると

$Q_2(x)=(x-\alpha)Q_3(x)+a_2\cdots$③　（$Q_3(x)$ は 1 次）

$Q_3(x)$ を $(x-\alpha)$ で割った商を a_4 余りを a_3 とすると

$Q_3(x)=a_4(x-\alpha)+a_3\cdots$④

ここで、④を③に代入すると、

$Q_2(x)=\{a_4(x-\alpha)+a_3\}(x-\alpha)+a_2$

$=a_4(x-\alpha)^2+a_3(x-\alpha)+a_2$　さらに②から

$Q_1(x)=(a_4(x-\alpha)^2+a_3(x-\alpha)+a_2)(x-\alpha)+a_1$

$=a_4(x-\alpha)^3+a_3(x-\alpha)^2+a_2(x-\alpha)+a_1$

最後に①に代入して

$f(x)=a_4(x-\alpha)^4+a_3(x-\alpha)^3+a_2(x-\alpha)^2+a_1(x-\alpha)+a_0$

が得られる。

$\alpha=1$ の場合を計算してみると、

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+3$

$=3(x-1)^4+8(x-1)^3-6(x-1)^2-24(x-1)-10$

実は、 $g_1(x),g_2(x),g_3(x)$ は

$g_1(x)=-24(x-1)-10=-24x+14$

$g_2(x)=-6(x-1)^2-24(x-1)-10$

$=-6x^2-12x+8$

$g_3(x)=8(x-1)^3-6(x-1)^2-24(x-1)-10$

$=8x^3-30x^2+12x$

この式の、1 次以下、2 次以下、3 次以下の項だけを取り出したものである。$f(1.1)$ の値もこの式から

$f(1.1)=3\times0.0001+8\times0.001-6\times0.01-24\times0.1-10$

$f(1.1)=3\times0.0001+8\times0.001\boxed{-6\times0.01-24\times0.1-10}$

例えば、この$\boxed{}$で囲まれた部分だけを取り出すと $g_2(1.1)$ になり、それはそれより高次の項でできている $3\times0.0001+8\times0.001$ の部分は小さいとみなして無視した値を出したことになる。この、無視した部分の値が「無視したためにできる誤差」です。

x の多項式 $f(x)$ を $(x-\alpha)^{m+1}$ で割った余りを $g_m(x)$ とすると、

$g_m(x)=a_0+a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+\cdots\cdots+a_m(x-\alpha)^m$

と表される m 次以下の多項式であり。

$$\boldsymbol{g_m(\alpha)=f(\alpha), g_m'(\alpha)=f'(\alpha),\cdots,g_m^{(k)}(\alpha)=f^{(k)}(\alpha),\cdots}$$
$$\boldsymbol{\cdots,g_m^{(m)}(\alpha)=f^{(m)}(\alpha)}$$

を全てみたす。

（証明） $R(x)=f(x)-g_m(x)$ とおくと、

$R(x)=a_{m+1}(x-\alpha)^{m+1}+a_{m+2}(x-\alpha)^{m+2}+\cdots\cdots$

この各項はすべて m 回以下の微分によって

$A(x-\alpha)^l$ （$l\geq1$）の形になるから

$R^{(k)}(\alpha)=f^{(k)}(\alpha)-g_m^{(k)}(\alpha)=0$ （$0\leq k\leq m$）

∴上の性質を持つとわかった。

ところで、

$g_m(x)=a_0+a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+a_3(x-\alpha)^3+a_4(x-\alpha)^4+\cdots$

を実際に微分してみると、

$g_m'(x)=a_1+2\cdot a_2(x-\alpha)+3\cdot a_3(x-\alpha)^2+4\cdot a_4(x-\alpha)^3+\cdots$

$g_m''(x)=2\cdot a_2+3\cdot2\cdot a_3(x-\alpha)+4\cdot3\cdot a_4(x-\alpha)^2+\cdots$

$g_m^{(3)}(x)=3\cdot2\cdot a_3+4\cdot3\cdot2\cdot a_4(x-\alpha)+\cdots$

$g_m^{(4)}(x)=4\cdot3\cdot2\cdot a_4+\cdots$

となり

$g_m(\alpha)=a_0=f(\alpha)$

$g_m'(\alpha)=a_1=f'(\alpha)$

$g_m''(\alpha)=2!a_2=f''(\alpha)$

$g_m^{(3)}(\alpha)=3!a_3=f^{(3)}(\alpha)$

……

$g_m^{(k)}(\alpha)=k!a_3=f^{(k)}(\alpha)$

……

ここから、

$a_k=\dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$ 　が得られる。

$f(x)$ が n 次多項式でのとき $f(x)=g_n(x)$ が成り立つ。

これを利用して

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+3$ を

$f(x)=a_0+a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+a_3(x-\alpha)^3+a_4(x-\alpha)^4$

と変形してみよう

$f(1)=3-4-12+3=10=a_0$

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$f'(1)=12-12-24=-24=a_1$

$f''(x)=36x^2-24x-24$

$f''(1)=36-24-24=-12=2!a_2$

より $a_2=-6$

$f^{(3)}(x)=72x-24$

$f^{(3)}(1)=72-24=48=3!a_3$

$a_3=8$

$f^{(4)}(x)=72=4!a_4$

$a_4=3$ 　　以上の計算から

$f(x)=-10-24(x-1)-6(x-1)^2+8(x-1)^3+3(x-1)^4$

さて、これまでの話だけだと余り利用価値のなさそうな話なのですが・・・、

$f(x)$ が、多項式だけでなく、$\sin x,\cos x,e^x,\log x,\cdots$ などの一般の関数が x の多項式で近似できるとすれば、科学の大進歩になる。

でも、近似値は本当の値ではないのでは？

ところが、近似なしでは、物理学も複雑で人間には理解不能なものになってしまいます。地上での物体の運動を考えるとき、重力は常に「下向き」に一定と考えますが、実は重力は地球の重心の方向に向かっているから、地球上のどの場所にあるかによって「下」という方向は変わるわけです。日本とアルゼンチンでは同じ「下向き」といっても反対向きです。しかし自分の周辺では地球の丸さは感じられません、そのような「下向き」が同じ向

きを表していると考えられるような範囲では、場所による「下向き」の違いを無視して、方程式を立てるのです。ところが、人工衛星の運動を考えるときはそうはいきませんね。地球の丸さが影響するからです。

質量があって大きさのない点として表される物体を「質点」といいますが、その大きさが運動に与える影響が無視できる場合は、地球や太陽でも質点と考えます。

何を無視するかが腕の見せ所なのです。影響の小さいものも考慮したいときは、それを考慮した場合のずれを調べます。質点という概念自体が近似であり、素晴らしい発明なのです。

$f(x)$ が $x=\alpha$ で何回でも微分可能な関数だとします。
$x=\alpha$ の点で滑らかなごくごく普通の関数を考えればよいのです。
このとき、

$$g_m(x)=a_0+a_1(x-\alpha)+a_2(x-\alpha)^2+\cdots\cdots+a_m(x-\alpha)^m$$

と表される m 次以下の多項式であり。

$$g_m(\alpha)=f(\alpha), {g_m}'(\alpha)=f'(\alpha), \cdots, {g_m}^{(k)}(\alpha)=f^{(k)}(\alpha), \cdots$$
$$\cdots, {g_m}^{(m)}(\alpha)=f^{(m)}(\alpha)$$

を全てみたす。
そのような性質を持つ多項式 $g_m(x)$ は、前と同様に求められ、そのときの各係数は

$$a_k=\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$$

で与えられる。

$$g_m(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\cdots$$
$$\cdots+\frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}(x-\alpha)^m$$

を関数 $f(x)$ の「**$x=\alpha$ のまわりの m 次テーラー多項式**」と呼ぶことにしよう。

これが、本当に近似なのかどうかは、誤差を与える関数
$R_m(x)=f(x)-g_m(x)$ （剰余項）
の大きさの評価によるが、$x=\alpha$ での微分的性質が m が大きいほど「より似ている」ことから、α の周辺ではグラフがだんだん近づいてくるだろうと考えるのは自然だ。

特に「**$x=0$ のまわりの m 次テーラー多項式**」

$$g_m(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m$$

がよく使われる。

（例題 9.1） 関数 $f(x)=\log x$ について、
$f(x)$ の $x=1$ のまわりの 4 次テーラー多項式 $g_4(x)$ を求めさらに $g_4(1.1), g_4(2), g_4(3)$ の値を求めよ。

$$f(x)=\log x,\ f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2},\ f^{(3)}(x)=\frac{2}{x^3},\ f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4},$$

$$f(1)=0,\ f'(1)=1,\ f''(1)=-1,\ f^{(3)}(1)=2,\ f^{(4)}(1)=-6,$$

$$g_4(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4$$

$f(x), g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)$ の値を求めると、

x	$f(x)$	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
1.1	0.09531	0.1	0.095	0.09533	0.09531
2	0.69315	1	0.5	0.83333	0.58333
3	1.09861	2	0	2.66666	−1.33333

$x=1.1$ のときは急速に近づいているが、
$x=2$ のときは、近づいているように見えるが、その近づき方はずいぶんゆっくりだ。
$x=3$ のときは、逆にだんだん遠のいている。
$x=2$ のとき

$$g_m(2)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{m}=S_m$$

この S_m の $m\to\infty$ の極限値の求め方は有名なので紹介しよう。
$m=2n$ のとき

$$S_m=S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n})-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$
$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\log(1+x)\right]_0^1 = \log 2$$

$m = 2n-1$　のときは

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + \frac{1}{2n}) = \log 2$$

$$g_m(3) = 2 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \cdots + \frac{(-2)^{m-1}}{m}$$

は、$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{2^{m-1}}{m} = +\infty$ だから発散する。

> 1999 年の東大（前期）入試第 6 問
>
> $$\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx > 8$$
>
> であること示せ。ただし、$\pi = 3.14\cdots$ は円周率、
> $e = 2.71\cdots$ は自然対数の底である。

左辺を積分すると

$$\frac{2(e^{\pi}-1)}{5} > 8$$　となり

結局 $e^{\pi} > 21$　を示せばよいとわかるのだが。

$2.7^3 = 19.683$, $2.71^3 = 19.902511$

で、21 に届かない。

手元の関数電卓で計算してみると

$e^{\pi} = 23.14069263$　となったが、試験場では手計算でなんとかしないといけない。

$e^{3.1}$, $e^{3.14}$ の近似値を計算してみよう。

> (例題 9.2)　関数 $f(x) = e^x$　について、
> $f(x)$ の $x = 3$ のまわりの 4 次テーラー多項式 $g_4(x)$ を求めさらに $g_4(3.1), g_4(3.14)$ の値を求めよ。

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = f^{(3)}(x) = f^{(4)}(x) = e^x$$
$$f(3) = f'(3) = f''(3) = f^{(3)}(3) = f^{(4)}(3) = e^3$$

$$g_4(x) = e^3 + e^3(x-3) + \frac{e^3}{2}(x-3)^2 + \frac{e^3}{6}(x-3)^3 + \frac{e^3}{24}(x-3)^4$$

$$= e^3\left\{1 + (x-3) + \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{1}{6}(x-3)^3 + \frac{1}{24}(x-3)^4\right\}$$

$e^3 = 2.71^3 = 19.902511$ として計算して

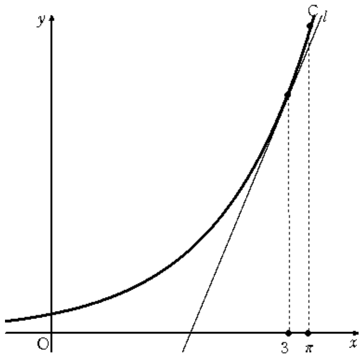
（$e = 2.7182818\cdots$ が正しい値だから、値を少な目に見積もることになる。）

x	$f(x)$	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
3.1	21.98897	21.893	21.992	21.996	21.996
3.14	22.88356	22.689	22.884	22.893	22.893

実は、$e^3 = 2.7^3 = 19.685$, $\pi = 3.1$ として計算しても

$g_1(3.1) = 21.6513$　となり 21 を越えている。

大学入試で要求される近似は、1 次近似で十分だ。大学入試の解答としては、接線を利用して図形的に説明すればよい。



$f(x) = e^x$　とする

曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $(3, e^3)$ での接線 l の方程式は

$$y = e^3(x-3) + e^3$$
$$= e^3(x-2) = g(x)$$

$f''(x) = e^x > 0$ より、曲線 C のグラフは至る所すべて下に凸であるから、曲線 C は接点以外ではつねに直線 l の上にある。このことから、

$$f(\pi) = e^{\pi} > e^{3.1} > g(3.1) = e^3 \cdot 1.1 > 2.7^3 \cdot 1.1 = 21.6513$$

$\therefore e^{\pi} > 21$

このように答案を書くことが出来れば十分だ。

> (例題 9.3)　次に与える関数 $f(x)$ の $x = 0$ のまわりの 5 次テーラー多項式 $g_5(x)$ を求めよ。
>
> 1)　$f(x) = e^x$
>
> 2)　$f(x) = \sin x$
>
> 3)　$f(x) = \cos x$
>
> 4)　$f(x) = \log(1+x)$
>
> 5)　$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

（解答）結果だけ示そう。

1)　$g_5(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 + \dfrac{1}{5!}x^5$

2)　$g_5(x) = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5$

3)　$g_5(x) = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4$

4)　$g_5(x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{5}x^5$

5)　$g_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

剰余項 $R_m(x)=f(x)-g_m(x)$ が

$\lim_{m\to\infty} R_m(x)=\lim_{m\to\infty}\{f(x)-g_m(x)\}=0$ を満たすとき、

$$f(x)=\lim_{m\to\infty} g_m(x) = f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\cdots$$

と書く、有名な結果を書いておく。

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$$

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\ (-1<x\le 1)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\ (-1<x<1)$$

右辺を左辺の関数の $x=0$ のまわりのテーラー展開

あるいは単にマクローリン展開という。

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$

の両辺の x の部分に ix を代入してみると、

$$e^{ix}=1+ix+\frac{1}{2!}(ix)^2+\frac{1}{3!}(ix)^3+\frac{1}{4!}(ix)^4+\frac{1}{5!}(ix)^5+\cdots$$

$$=(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots)+i(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots)$$

$$=\cos x+i\sin x$$

オイラーの公式だ！

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

の両辺を x で微分してみると

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots$$

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$$

の両辺を x で微分してみると、

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$$

からは

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots$$

が得られる（期待値の計算でよく見かける）

これらの収束する範囲など、厳密な議論は省くが「うまくできている」ことはわかると思う。

これらの形をみると、

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

なども、なるほどと思えるはずだ。

x の絶対値が 1 に較べてかなり小さい場合、

（このことを「$|x|\ll 1$」と書く。）

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$　を

$\frac{e^x-1}{x}\sim 1$　と書き表すことにしよう。

この式は移項など、基本的計算が等式と同じようにできて、(ただし近似の次数を超えた割り算はできない）

$$e^x-1\sim x\ \Leftrightarrow\ e^x\sim 1+x\ \Leftrightarrow\ e\sim(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

このように変形できるとする。

「～」で結ばれた両辺は、$|x|\ll 1$ であれば、かなり値が近く、グラフでいえば接する形になる。

$e\sim(1+x)^{\frac{1}{x}}$　は $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$$e^x\sim 1+x\ \Leftrightarrow\ x\sim\log(1+x)\ \Leftrightarrow\ \frac{\log(1+x)}{x}\sim 1$$

これは

$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$　と同じである。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

から

$\sin x \sim x$

$\cos x \sim 1-\frac{1}{2}x^2$

辺々かけて

$\sin x \cos x \sim x-\frac{1}{2}x^3$

ここで「あれっ？」と思うかもしれない

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\left\{(2x)-\frac{1}{6}(2x)^3+\cdots\right\}$$

$$= x-\frac{2}{3}x^3+\cdots$$

だから、1 次の項しか一致しない

なぜなら、それは近似計算だからだ。

$\sin x \sim x$

$\cos x \sim 1-\frac{1}{2}x^2$

は x の 2 次まで正しいが

3 次の項まで保障しないからだ

3 次までの結果が欲しいときは

$\sin x \sim x-\frac{1}{3}x^3$

を使って

$$\sin x \cos x \sim (x-\frac{1}{6}x^3)(1-\frac{1}{2}x^2) \sim x-\frac{2}{3}x^3$$

3 次以上の項は計算できても無視すればよい。

したがって、

$\sin x \sim x$

$\cos x \sim 1-\frac{1}{2}x^2$

からは

$\sin x \cos x \sim x$

が正しい

特に有用なのは、次の式だ。

$(1+x)^r \sim 1+rx$

これは

関数　$f(x)=(1+x)^r$ を微分して

$f'(x)=r(1+x)^{r-1}$

$$\therefore\ f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r$$

$$\frac{(1+x)^r-1}{x} \sim r \Leftrightarrow (1+x)^r \sim 1+rx$$

となる。

物理をやる人はこれを多用する

たとえば、関数電卓がないときに $\sqrt{10}$ の値が必要になったとしよう

$\sqrt{10}=3.16227766\cdots$ これが正しい値なのだが、

まず、

$$\sqrt{10}=\sqrt{9+1}=3\sqrt{1+\frac{1}{9}}=3(1+\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}}$$

ここで $(1+\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}} \sim 1+\frac{1}{18}$

$$\sqrt{10} \sim 3+\frac{1}{6}=3.16666\cdots$$

まだ精度が足りないと思ったら

$(3+\frac{1}{6})^2=9+1+\frac{1}{36}$ から

$$\sqrt{10}=\sqrt{(3+\frac{1}{6})^2-\frac{1}{36}}=(3+\frac{1}{6})(1-\frac{1}{19^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$\sim \frac{19}{6}(1-\frac{1}{2\cdot 19^2}) \sim \frac{19}{6}-\frac{1}{228}=3.16228070$$

でも、このままだと誤差がどれくらいかわかりませんね。

$(1+x)^{\frac{1}{2}} \sim 1+\frac{1}{2}x$　を使って計算した場合の誤差は、

$x<<1$　と考えれば

$$\sqrt{1+x}-(1+\frac{1}{2}x)$$

$$=\frac{1+x-(1+x+\frac{1}{4}x^2)}{\sqrt{1+x}+(1+\frac{1}{2}x)}$$

$$\sim \frac{x^2}{8\sqrt{1+x}} \sim \frac{x^2}{8}$$

今の計算の場合 $3+\frac{1}{6} \sim \sqrt{10}=\sqrt{1+x}$

$x=-\frac{1}{19^2}$ として誤差の計算をすると、

$\frac{x^2}{8}=\frac{1}{8\cdot 19^4} \sim 0.00000096$　上の計算による誤差は

この約 3.166666 倍で

0.00000304 となるから小数第 5 位までは信頼できるこ

とがわかる。ルートの機能がついてない電卓でも、このように逐次に近似を進めていけば、かなり精度の高い値を手にすることができる。

ところが、このような計算を何度もやる必要があるときは、漸化式を作る。例えば$\sqrt{X}$ を計算したいとする。

$\sqrt{X}$ に一番近い数（大抵整数） a_1 を設定し

$$\sqrt{X} = \sqrt{{a_1}^2 + (X - {a_1}^2)} = a_1(1 + \frac{X - {a_1}^2}{{a_1}^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$\sim a_1(1 + \frac{X - {a_1}^2}{2{a_1}^2}) = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}\frac{X}{a_1} = a_2$$

このようにして、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\frac{X}{a_n}$$

によって次々と精度の高い近似値を求める。

この、きわめて便利な公式

$(1+x)^r \sim 1 + rx$

を、曲線の漸近線を求める計算に使ってみよう。

(例題 9.4)次の曲線の漸近線の方程式を求めよ。

$$y = \sqrt{4x^2 - 6x + 1}$$

ルートの中が 0 以上になるのは、

$x \le \frac{3-\sqrt{5}}{4}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{4} \le x$ 　（定義域）

$$y = \sqrt{4x^2 - 6x + 1} = \sqrt{4x^2}\sqrt{1 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{4x^2}}$$

$|x| \gg 1$（つまり x の絶対値が 1 に較べてかなり大きい）ときには、

$-\frac{3}{2x} + \frac{1}{4x^2}$ はかなり小さいことになる

$$\sqrt{1 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{4x^2}} = \left\{1 + (-\frac{3}{2x} + \frac{1}{4x^2})\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\sim 1 + \frac{1}{2}(-\frac{3}{2x} + \frac{1}{4x^2}) = 1 - \frac{3}{4x} + \frac{1}{8x^2}$$

$$y \sim \pm 2x(1 - \frac{3}{4x} + \frac{1}{8x^2}) = \pm 2x \mp \frac{3}{2} \pm \frac{1}{4x}$$

したがって、漸近線は

$$y = 2x - \frac{3}{2}, \ y = -2x + \frac{3}{2}$$

一次までの近似計算であれば

（高校物理ではこれで十分）

$\sin x \sim x$
$\cos x \sim 1$
$\tan x \sim x$
$(1+x)^r \sim 1 + rx$
$e^x \sim 1 + x$

このあたりを頭に入れておくと便利だ。

テーラー近似多項式は

$$f(x) - f(\alpha) = \int_\alpha^x f'(t)dt = \left[-(x-t)f'(t)\right]_\alpha^x + \int_\alpha^x (x-t)f''(t)dt$$

$$= (x-\alpha)f'(\alpha) + \left[-\frac{1}{2!}(x-t)^2 f''(t)\right]_\alpha^x + \int_\alpha^x \frac{1}{2!}(x-t)^2 f^{(3)}(t)dt$$

$$= (x-\alpha)f'(\alpha) + \frac{1}{2!}(x-\alpha)^2 f''(\alpha) + \int_\alpha^x \frac{1}{2!}(x-t)^2 f^{(3)}(t)dt$$

このように部分積分をすることによっても得られ、

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)f'(\alpha) + \frac{1}{2!}(x-\alpha)^2 f''(\alpha) + \int_\alpha^x \frac{1}{2!}(x-t)^2 f^{(3)}(t)dt$$

剰余項はこの例から

$$R_2(x) = \int_\alpha^x \frac{1}{2!}(x-t)^2 f^{(3)}(t)dt$$

さらに、同様にして部分積分を続けると

$$R_m(x) = \int_\alpha^x \frac{1}{m!}(x-t)^m f^{(m+1)}(t)dt$$

関数 $f(x) = e^x$ 　について

$$g_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$$

を用いて

$$e = e^1 \sim 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2.716666667$$

と $e = 2.718281828$ を近似計算した場合の誤差

$R_m = \int_0^1 \frac{1}{5!}(1-t)^5 e^t dt$ を大雑把に見積もってみよう

$0 \le t \le 1$ において、$1 \le e^t \le e \sim 2.72$ （近似値より）

$$I = \int_0^1 \frac{1}{5!}(1-t)^5 dt = \left[-\frac{1}{6!}(1-t)^6\right]_0^1 = \frac{1}{6!} \sim 0.00139$$

$I < R_m < 2.72I$ より

$0.00139 < R_m < 0.00378$

実際は $R_m \sim 0.001615$

で、求めた範囲の小さいほうに寄った値になっている。