2 項定理・多項定理の新しい見方

（係数がすべて１の多項定理）

by u1248

１．予感

　先日、3 年生に、「2 項定理は知ってるよね」といって授業を始めようとしたら、「あんなの、覚えられない！」「式が複雑！」など非難ごうごうだったので、

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$　・・・①
という公式は知っているよね。

この①の公式は

$(x+y)^3 = \frac{3!}{3!0!}x^3y^0 + \frac{3!}{2!1!}x^2y + \frac{3!}{1!2!}xy^2 + \frac{3!}{0!3!}x^0y^3$　・・・②
と書いても同じだよね。
確認してごらん。

（生徒は確認）なるほど

②の右辺は、一見複雑に見えるけど、

$$\frac{(\bigcirc+\square)!}{\bigcirc!\square!}x^{\bigcirc}y^{\square}$$

の形の式の $\bigcirc+\square=3$　をみたす形のものを全部足せば良いわけだから、見た目以上に簡単だね。
これが、3 乗だけで終わるんだったら「たまたま」成り立っただけなんだけど、
そうじゃないんだ。

$(x+y)^0 = 1$

$(x+y)^1 = x+y$
$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$
$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$
でも同じ法則が成り立っていることを確認してごらん。

（生徒確認）感心した様子

ところで、係数の

$$\frac{(○+□)!}{○!□!}$$

の部分なんだけど、これコンビネーションで表すことができるんだ。

例えば${}_5C_3$　は

$${}_5C_3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} = \frac{5!}{3!2!}$$

だよね。
この式を、右辺から逆に読んでみると、
例えば、
$\frac{7!}{4!3!}$をコンビネーションで表すことができるかい？

（生徒すぐに反応）

そうだ、${}_7C_4$　だね。
一般的には

$$\frac{(○+□)!}{○!□!} = {}_{○+□}C_{○}$$

が成り立つことになる。
それじゃ、②の式をコンビネーションで表してごらん。

（生徒作業）わかった
それが 2 項定理なんだよ。

実は、話はこれで終わらない。

例えば、
$(x+y+z)^5$ を展開すると、どんな形になると思う？

（数人の生徒が気付く）

そう

$$\frac{(○+□+△)!}{○!□!△!}x^{○}y^{□}z^{△}$$

の形の式の ○+□+△＝5　をみたす形のものを全部足せば良い。
ここまでくれば、$(x+y+z+u)^7$ でも同じだね、
これを多項定理という。

それじゃ、なぜこんな式が導けるんだろう、知ってるかい？

・・・・・・・・・・・・・・・
と授業が続いていったが、
私は、ある事実に気が付いて、うきうきした気分になっていた。

２.「シンジラレナーィ！」美しさ

$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$　･･･①
を

$(x+y)^3 = \frac{3!}{3!0!}x^3y^0+\frac{3!}{2!1!}x^2y+\frac{3!}{1!2!}xy^2+\frac{3!}{0!3!}x^0y^3$　･･･②
と書いたついでに、
②の両辺を3! で割ってみよう

すると

$$\frac{(x+y)^3}{3!}=\frac{x^3y^0}{3!0!}+\frac{x^2y}{2!1!}+\frac{xy^2}{1!2!}+\frac{x^0y^3}{0!3!} \quad \cdots ③$$

となる。

③は、すべて $\frac{x^n}{n!}$ の形の式で表現されている。

そこで、

$x^{<n>}=\frac{x^n}{n!}$ と書くことにすると、

③は

$(x+y)^{<3>}=x^{<3>}y^{<0>}+x^{<2>}y^{<1>}+x^{<1>}y^{<2>}+x^{<0>}y^{<3>}$

と書けてしまう。

右辺は $\sum_{i+j=3} x^{<i>}y^{<j>}$ （i, j は非負の整数）

の形である

すると、これを一般化して

$$(\sum_{i=1}^{m} x_i)^{<n>}=\sum_{\sum_{j=1}^{m} l_j=n}(\prod_{j=1}^{m} x_j{}^{<l_j>})$$

と書くこともできる。

　とにかく、きれいさっぱり係数が消えてしまう。

$x^{<n>} = \dfrac{x^n}{n!}$ の形は数学の至る所に現れてくる

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^{<n>}$$

や、

点 $(0,0,0)$,$(x,0,0),(0,x,0),(0,0,x)$ を結んでできる図形の体積 $\dfrac{x^3}{3!} = x^{<3>}$

など

なにかがあるような気がしてならない。

話は、突然ここで終わる「この続きを書くには、余白が足りない」という理由で