割り算とその余りの幾何学

By u1248

1.　x の多項式 $f(x)$ を $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割った余りの幾何学的意味

例題 1）　x の多項式 $f(x)$ を $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割った余りを求めよ。（係数に $\alpha, \beta, f(\alpha), f(\beta)$ を用いてよい）
　ただし、$\alpha \neq \beta$ とする。

（解）$f(x)$ を $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割った余りは 1 次以下であるからそれを $px+q$ とおき、またその商を $Q(x)$ とすると、　$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\,Q(x)+px+q$　であるからが成り立つから

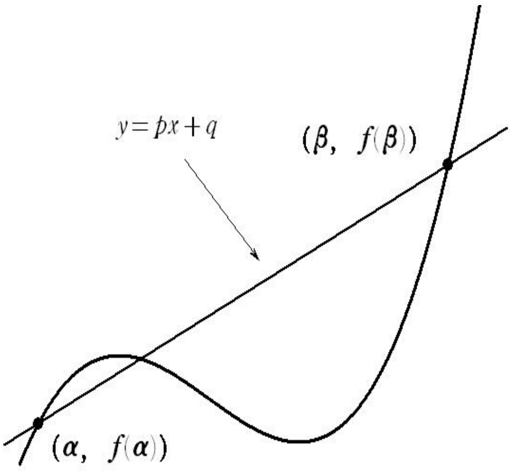
$f(\alpha) = p\alpha + q$ ･･･①

$f(\beta) = p\beta + q$ ･･･②

①②より $p=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$，$q=f(\alpha)-\alpha\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

よって、求める余りは　$px+q=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+f(\alpha)$ ･･･③

よくご存知の問題と思われますが、この余りを表す式の形、どこかで見たことはありませんか？



これは、曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点　$(\alpha, f(\alpha))$,$(\beta, f(\beta))$
を通る直線を表す一次関数に一致しています。
実際、①②は曲線 $y=f(x)$ と、直線 $y=px+q$ が
$x=\alpha,\beta$ で共有点を持つ条件を表しています。
もちろん､①②は α,β が互いに共役な虚数の場合を含んでいますから、その場合には別な表現で言い直さなければなりませんが、イメージとしてはこれがわかりやすい。

それでは、平方式で割った場合は、どうなるか？だいたい想像がつきますね。

例題 2）　x の多項式 $f(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割った余りを求めよ。（係数に $\alpha, f(\alpha), f'(\alpha)$ を用いてよい）

（解）$f(x)$ をで $(x-\alpha)^2$ 割った余りは 1 次以下であるからそれを $px+q$ とおき、またその商を $Q(x)$ とすると、　$f(x)=(x-\alpha)^2\,Q(x)+px+q$　であるからが成り立つから、この式と、この式の両辺を微分した式
$f'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+p$ の両辺に $x=\alpha$ を代入して

$f(\alpha) = p\alpha + q$ ･･･④

$f'(\alpha) = p$ 　　･･･⑤

①②より $p=f'(\alpha)$，$q=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)$

よって、求める余りは　$px+q=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ ･･･⑥

④⑤は直線 $y=px+q$ が曲線 $y=f(x)$ に点 $(\alpha, f(\alpha))$ で接することを表しているから、
直線 $y=px+q$ はこの点での接線の方程式です。

⑥は③の　$\beta\to\alpha$ の極限になっている（あたりまえですが）

このことに気が付いたのは、最近、授業で行列のｎ乗の説明をしていた時なのですが、このことに触れている本や記事は見た事がないので投稿してみました。（単に勉強不足なだけかもしれませんが）

代数と幾何の間に見事に橋がわたっているとは思いませんか？

x の多項式 $f(x)$ を $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)$ で割った余りの $m-1$ 次式 $g(x)$
に拡張することは容易です。

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_m$ の中に重複するものがあれば、$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフは
その重複度が l なら、そこで l 次の接触をしているわけです。

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_m$ の中に重複するものがない場合、$g(x)$ は $Lagrange$ の補間公式で与えられる。
すなわち

$$g(x)=\sum_{i=1}^{m} f(\alpha_i)\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_m)}{(\alpha_i-\alpha_1)(\alpha_i-\alpha_2)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+2})\cdots(\alpha_i-\alpha_m)}$$

2.　応用例（この話の拡がりとしての）

x^n を $(x-\alpha)(x-\beta)$ で割った余り $g(x)$ は

$\alpha\neq\beta$ のとき　$g(x)=\dfrac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^n=\alpha^n\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}+\beta^n\left(-\dfrac{x-\beta}{\beta-\alpha}\right)$

$\alpha=\beta$ のとき　$g(x)=n\alpha^{n-1}(x-\alpha)+\alpha^n=n\alpha^{n-1}x-(n-1)\alpha^n$

$\alpha\neq\beta$ のときの右辺は $Lagrange$ 風に書いてみました。
こうすると、x に定数を代入するしたとき、α,β を公比とする２つの等比数列の和になっています。

（行列のｎ乗）

行列　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において、$a+d=\tau$,$ad-bc=\delta$ とする

２次方程式　$x^2-\tau x+\delta=0$ の２解を α,β とすると、

$\alpha\neq\beta$ のとき　$A^n=\alpha^nP+\beta^nQ$

ただし $P=\dfrac{A-\alpha E}{\beta-\alpha}$、$Q=-\dfrac{A-\beta E}{\beta-\alpha}$

この P,Q は $P+Q=E$,$\alpha P+\beta Q=A$,$P^2=P$,$Q^2=Q$,$PQ=QP=O$ を満たす
（このあたりを題材にした入試問題が多いですね、なにしろスペクトル分解ですから）

$\alpha=\beta$ のとき $A^n=n\alpha^{n-1}A-(n-1)\alpha^nE$

（3 項間漸化式）

3 項間漸化式　$a_{n+2}-\tau a_{n+1}+\delta a_n=0$ の一般項は

2 次方程式　$x^2-\tau x+\delta=0$ の 2 解をα,β とすると、

$\alpha\neq\beta$ のとき　$a_n=p\alpha^n+q\beta^n$　　ただし$P=\dfrac{a_1-\alpha a_0}{\beta-\alpha}$、$q=-\dfrac{a_1-\beta a_0}{\beta-\alpha}$

（これは、初期値a_0,a_1 が与えられた場合）

（初期値a_1,a_2 が与えられた場合は）

$a_n=p\alpha^{n-1}+q\beta^{n-1}$　　ただし$P=\dfrac{a_2-\alpha a_1}{\beta-\alpha}$、$q=-\dfrac{a_2-\beta a_1}{\beta-\alpha}$

一般項がα,β を公比とする 2 つの等比数列の和になっています。

（注）最近の大学入試の流行にちょっと触れておくと

「　2 次方程式　$x^2-\tau x+\delta=0$ の 2 解をα,β とすると、

$a_n=p\alpha^n+q\beta^n$ は漸化式$a_{n+2}-\tau a_{n+1}+\delta a_n=0$ を満たす」

ということから問題を作っているケースが多い

$\alpha=\beta$ のとき$a_n=n\alpha^{n-1}a_1-(n-1)\alpha^n a_0$　　（これは、初期値a_0,a_1 が与えられた場合）

（初期値a_1,a_2 が与えられた場合は）$a_n=(n-1)\alpha^{n-2}a_2-(n-2)\alpha^{n-1}a_1$

この項目は、わざと（行列のｎ乗）とこれは同じ問題だということを意識してもらうために、まったく同じ形式で表現しています。

それでは何故「同じ」なのでしょうか？

$\alpha\neq\beta$ の場合だけ説明すれば十分でしょう。
数列の「項番号をひとつ増やす」演算子をDとしします。
この演算子のはたらきは、例えば

$Da_n=a_{n+1}$　，　$D^m a_n=a_{n+m}$

$(D-1)^2a_n=(D^2-2D+1)a_n=D^2a_n-2Da_n+1a_n=a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n$

$a_n=D^n a_0$

$a_n=D^{n-1}a_1$

など書いてみるとだいたいわかるでしょう。
これについては、どこかでまた書く事にしますが、この演算子Dを使うと、
漸化式　$a_{n+2}-\tau a_{n+1}+\delta a_n=0$ は

$(D^2-\tau D+\delta)a_n=0$　と書けます。

このとき、上で出てきたα,β を使って

$$D^n = Q(D)(D^2 - \tau D + \delta) + \alpha^n \frac{D-\alpha}{\beta-\alpha} + \beta^n \left(-\frac{D-\beta}{\beta-\alpha} \right)$$

$Q(x)$ は x^n を $x^2 - \tau x + \delta$ で割った商でその x のところに形式的に D を代入したものが $Q(D)$ です。

したがって、

$$\begin{aligned} a_n = D^n a_0 &= Q(D)(D^2 - \tau D + \delta)a_0 + \alpha^n \frac{(D-\alpha)a_0}{\beta-\alpha} + \beta^n \left(-\frac{(D-\beta)a_0}{\beta-\alpha} \right) \\ &= Q(D)(a_2 - \tau a_1 + \delta a_0) + \alpha^n \frac{a_1 - \alpha a_0}{\beta-\alpha} + \beta^n \left(-\frac{a_1 - \beta a_0}{\beta-\alpha} \right) \\ &= \alpha^n \frac{a_1 - \alpha a_0}{\beta-\alpha} + \beta^n \left(-\frac{a_1 - \beta a_0}{\beta-\alpha} \right) \end{aligned}$$

ここまで、かなり「はしょって」書いてしまったが、(行列のｎ乗）については多くの本で触れられているし、（３項間漸化式）の中の演算子 D の話は、差分法、和分法のテキストも出ているだろう。高校生向けのものとしては、SEG 出版から古川昭夫著「数学プロムナードⅡ」に「数列も多項式もベクトル」という項目で詳しく触れられている。

本当は、まだまだ話は拡がるのだがこれくらいにしておこう。