

第1問 解答例と解説

$$\begin{cases} b = 2a^2 - 1 \cdots \textcircled{1} \\ c = 2b^2 - 1 \cdots \textcircled{2} \\ a = 2c^2 - 1 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

において、 $|a| > 1$ と仮定してみます

(この「してみる」という感覚が大切です。)

すると、 $\textcircled{1}$ より $b > 1$ 、したがって $\textcircled{2}$ より $c > 1$ 、 $\textcircled{3}$ より $a > 1$ が成り立つことになる。

ところで、このとき

$$\textcircled{1} \text{より } b - a = 2a^2 - a - 1 = (a - 1)(2a + 1) > 0$$

$$\textcircled{2} \text{より } c - b = 2b^2 - b - 1 = (b - 1)(2b + 1) > 0$$

$$\textcircled{3} \text{より } a - c = 2c^2 - c - 1 = (c - 1)(2c + 1) > 0$$

が成り立つことになるから

$a > c > b > a$ となり矛盾が導かれた。

\therefore 仮定 $|a| > 1$ は間違いだから $|a| \leq 1$

同様にして

$|a| \leq 1, |b| \leq 1, |c| \leq 1$ が得られる。

(ぐるりと一周して…という証明法なのです。)