

第2問 解答例と解説

1) 実数の2乗は必ず0以上になるから

$a^2 + b^2 \geq 0$ が成り立つ。したがって①を変形して、

$$a^2 + b^2 = -p^2 + 2p \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore -p^2 + 2p \geq 0$$

これを解いて、 $0 \leq p \leq 2$ が得られる。

2) ②の右辺は p の2次関数であり、

$$-p^2 + 2p = -(p-1)^2 + 1 \quad (0 \leq p \leq 2)$$

から $0 \leq \textcircled{2} \text{の右辺} \leq 1$

$$\therefore a^2 \leq a^2 + b^2 \leq 1$$

$$a^2 - 1 \leq 0 \quad \text{を解いて、} \quad -1 \leq a \leq 1$$

すなわち、 $|a| \leq 1$ が成り立つことがわかった。

$|b| \leq 1$ についても、同様に示すことができる。

(別解) ①を球面の方程式とみなすことができる。①を

$$a^2 + b^2 + (p-1)^2 = 1^2 \cdots \textcircled{3}$$

と変形すると、座標空間の点 (a, b, p) は中心 $(0, 0, 1)$ 半径1の球面上の点である。したがって

$$1) \quad 0 \leq p \leq 2 \quad 2) \quad |a| \leq 1, \quad |b| \leq 1$$

は明らかである。