

第3問 解答例と解説

数列の和が与えられて、そこから元の数列の一般項を求める問題はおなじみでしょう。

$$\sum_{k=1}^n f(k) = F(n) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

という関係は

$$\begin{cases} f(1) = F(1) & \cdots \textcircled{2} \\ f(n) = F(n) - F(n-1) \quad (n \geq 2) \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

と書き直すことができる。

特に、 $F(n)$ が $F(0) = 0$ を満たすなら、②は

$$f(1) = F(1) = F(1) - F(0)$$

となり、($n=1$ の場合も含め) すべての自然数 n について③が成り立つことになる。

したがって、この問題では

$F(n) = n^2(n+1)^2$ は $F(0) = 0$ を満たすから

$$a_n = F(n) - F(n-1)$$

$$= n^2(n+1)^2 - (n-1)^2 n^2 = 4n^3$$

となる。