

第12問 解答例と解説

6で割った余りを考えるには、整数全体を、6で割った余りで分類して考える、6で割った余りが

$$0 \text{ のもの} \quad \cdots \quad 6N \text{ の形 (Nは整数)} \quad \cdots \quad (0)$$

$$1 \text{ のもの} \quad \cdots \quad 6N+1 \text{ の形 (Nは整数)} \quad \cdots \quad (1)$$

$$2 \text{ のもの} \quad \cdots \quad 6N+2 \text{ の形 (Nは整数)} \quad \cdots \quad (2)$$

$$3 \text{ のもの} \quad \cdots \quad 6N+3 \text{ の形 (Nは整数)} \quad \cdots \quad (3)$$

$$4 \text{ のもの} \quad \cdots \quad 6N+4 \text{ の形 (Nは整数)} \quad \cdots \quad (4)$$

$$5 \text{ のもの} \quad \cdots \quad 6N+5 \text{ の形 (Nは整数)} \quad \cdots \quad (5)$$

このように、整数全体を分類すると、3より大きな素数は(1)か(5)のどちらかに含まれる。

なぜなら、(0)に素数は含まれないし、(2)は $2(3N+1)$ と書けるから素数は2のみ、(3)は $3(2N+1)$ で素数は3のみである、(4)は $2(3N+2)$ だから素数を含まない。

(1)または(5)に含まれる2数の計算

$$(6A+1)-(6B+1)=6(A-B) \quad (1)-(1)$$

$$(6A+1)+(6B+5)=6(A+B+1) \quad (1)+(5)$$

$$(6A+5)-(6B+5)=6(A-B) \quad (5)-(5)$$

から、和、差のどちらかは必ず6の倍数になることがわかる。

(同じ剰余類に属する数どうしの差は6の倍数でになることは当然ですね、同じ剰余類に属する数を小さい方から並べると、例えば剰余類(5) $5, 11, 17, \dots$ と公差6の等差数列になりますから)