

## 第17問 解答例と解説

思いつかないかもしれませんが、有名な証明です。

「無限に存在する」ことを証明するには「有限である」と仮定して、矛盾を導きます（背理法です）

素数は有限個で、その個数は  $N$  個であるとします。それらの素数を小さい方から並べたものを、 $p_1, p_2, \dots, p_N$  とします。

すると  $p_N$  より大きい自然数はすべて、 $p_1, p_2, \dots, p_N$  のうちのどれか、あるいはいくつかの倍数になっていることとなります。

ところで、いま

$$L = p_1 \cdot p_2 \cdots p_N + 1$$

( $p_1, p_2, \dots, p_N$  全部の積に 1 を足した数) を考えます。

すると、 $L$  は  $p_N$  より大きく、しかも、 $p_1, p_2, \dots, p_N$  のどの数で割っても 1 余ることになり、どれかの倍数であることに矛盾します。

したがって、「素数は有限個である」という仮定は誤りであることとなります。

以上より、素数は無限に存在することがわかった。