$\boxed{\text{第1問}}$ 制限時間　10分

実数a, b, c が

$$\begin{cases} b = 2a^2 - 1 \\ c = 2b^2 - 1 \\ a = 2c^2 - 1 \end{cases}$$

をみたすとき、$|a| \leqq 1, |b| \leqq 1, |c| \leqq 1$ が成り立つことを示せ。

（京都大学　部品）

第1問　解答例と解説

$$\begin{cases} b = 2a^2 - 1 \cdots ① \\ c = 2b^2 - 1 \cdots ② \\ a = 2c^2 - 1 \cdots ③ \end{cases}$$

において、$|a| > 1$ と仮定してみます

（この「してみる」という感覚が大切です。）

すると、①より $b > 1$ 、したがって②より $c > 1$ 、③より

$a > 1$ が成り立つことになる。

ところで、このとき

①より　$b - a = 2a^2 - a - 1 = (a-1)(2a+1) > 0$

②より　$c - b = 2b^2 - b - 1 = (b-1)(2b+1) > 0$

③より　$a - c = 2c^2 - c - 1 = (c-1)(2c+1) > 0$

が成り立つことになるから

$a > c > b > a$ となり矛盾が導かれた。

∴　仮定　$|a| > 1$ は間違いだから　$|a| \leqq 1$

同様にして

$|a| \leqq 1, |b| \leqq 1, |c| \leqq 1$ が得られる。

（ぐるりと一周して･･･という証明法なのです。）

$\boxed{\text{第2問}}$　制限時間　10分

実数a, b, pについて

$a^2 + b^2 + p^2 = 2p$ ･･･①

が成り立つとき、

1）不等式　$0 \leqq p \leqq 2$ が成り立つことを示せ。

2）不等式　$|a| \leqq 1$ および$|b| \leqq 1$が成り立つことを示せ。

（京都府立医科大学　改）

第2問　解答例と解説

１）実数の２乗は必ず０以上になるから

$a^2+b^2 \geqq 0$ が成り立つ。したがって①を変形して、

$a^2+b^2=-p^2+2p$ …②

$\therefore \quad -p^2+2p \geqq 0$

これを解いて、$0 \leqq p \leqq 2$ が得られる。

２）②の右辺は p の２次関数であり、

$-p^2+2p=-(p-1)^2+1 \quad (0 \leqq p \leqq 2)$

から　$0 \leqq$ ②の右辺 $\leqq 1$

$\therefore \quad a^2 \leqq a^2+b^2 \leqq 1$

$a^2-1 \leqq 0$　を解いて、　$-1 \leqq a \leqq 1$

すなわち、$|a| \leqq 1$ が成り立つことがわかった。

$|b| \leqq 1$ についても、同様に示すことができる。

（別解）①を球面の方程式とみなすことができる。①を

$a^2+b^2+(p-1)^2=1^2$ …③

と変形すると、座標空間の点 (a,b,p) は中心 $(0,0,1)$

半径１の球面上の点である。したがって

１）$0 \leqq p \leqq 2$　　２）$|a| \leqq 1$ 、$|b| \leqq 1$

は明らかである。

第3問　制限時間　5 分

数列$\{a_n\}$が

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2(n+1)^2$$ を満たすとき

数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

（２００６東大後期の部品）

第3問　解答例と解説

　数列の和が与えられて、そこから元の数列の一般項を求める問題はおなじみでしょう。

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = F(n) \cdots\cdots ①$$

という関係は

$$\begin{cases} f(1) = F(1) & \cdots ② \\ f(n) = F(n) - F(n-1) \quad (n \geq 2) & \cdots ③ \end{cases}$$

と書き直すことができる。

特に、$F(n)$ が $F(0) = 0$ を満たすなら、②は

$$f(1) = F(1) = F(1) - F(0)$$

となり、（$n = 1$ の場合も含め）すべての自然数 n について③が成り立つことになる。

したがって、この問題では

$F(n) = n^2(n+1)^2$ は $F(0) = 0$ を満たすから

$$\begin{aligned} a_n &= F(n) - F(n-1) \\ &= n^2(n+1)^2 - (n-1)^2 n^2 = 4n^3 \end{aligned}$$

となる。

$\boxed{\text{第4問}}$　制限時間　10分

前問の練習です

数列の和の公式をつくれ

（　　）の中に入る式を求めて下さい。

1） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\qquad\qquad)=n^2$

2） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\qquad\qquad)=n(n+1)$

3） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\qquad\qquad)=n^3$

4） $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\qquad\qquad)=n\cdot 2^{n+1}$

第4問　解答例と解説

右辺を $F(n)$ とおくと、いずれも $F(0)=0$ が成り立ちます
から、（　　　　）$=F(k)-F(k-1)$ です

１） $k^2-(k-1)^2=2k-1$

２） $k(k+1)-(k-1)k=2k$

３） $k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$

４） $k\cdot 2^{k+1}-(k-1)\ 2^k$

$=(2k-k+1)\ 2^k$

$=(k+1)\ 2^k$

このように、数列の和の公式は、右辺の式 $F(n)$ を先に与えておけば簡単につくることができます。

実は、数列の和の公式というのは全て
$F(0)=0$ を満たす $F(n)$ が右辺にあり

$$\sum_{k=1}^{n}(F(k)-F(k-1))=F(n)$$

のかたちになっています。確かめて下さい。

$\boxed{\text{第5問}}$　　制限時間　10分

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ が無理数であることを利用して、

$\tan 1^\circ$ も無理数であることを証明して下さい。

（　２００６京大後期　改）

第5問　解答例と解説

　背理法を使う問題ですね。それと、数学的帰納法的な考え方も使う面白い問題です。

まず $\tan 1^\circ$ が有理数であると仮定します。
すると、タンジェントの加法定理

$$\tan(n^\circ + 1^\circ) = \frac{\tan n^\circ + \tan 1^\circ}{1 - \tan n^\circ \tan 1^\circ}$$

により

$n = 1, 2, \cdots, 59$ について

「$\tan n^\circ$ が有理数なら $\tan(n^\circ + 1^\circ)$ も有理数」

が成り立ちます。
このことから

$\tan 1^\circ$ が有理数であれば

$\tan 2^\circ$、$\tan 3^\circ$、$\tan 4^\circ$、$\cdots\cdot$ $\tan 60^\circ$ はすべて有理数

ということになりますが、これは

「$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ が無理数であること」に矛盾します。
したがって

「$\tan 1^\circ$ は無理数でなければならない」という結論が得られました。

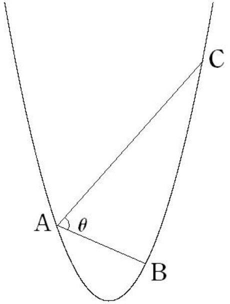
第6問　　制限時間　10分

　a,b,c は整数で、$a<b<c$ をみたす。放物線 $y=x^2$ 上に3点 $A(a,a^2),B(b,b^2),C(c,c^2)$ をとる。このとき $\angle BAC=60^\circ$ とはならないことを示せ。

　ただし $\sqrt{3}$ は無理数であることは証明なしに用いてよい。

（２００４年一橋大前期の(1)）

第6問　解答例と解説



直線 AB の傾きは

$$l=\frac{b^2-a^2}{b-a}=a+b$$

同様に
直線 AC の傾きは
$m=a+c$
l,m はともに整数
である。
いま∠BAC $=\theta$
とすると

$$\tan\theta=\frac{m-l}{1+lm}\quad\cdots①$$ が成り立つ

θ ＝60°とすると①の左辺＝$\sqrt{3}$ は無理数であり、
①の右辺は、a,b,c が整数だから有理数となり矛盾する。
したがって∠BAC ＝60°とはなりえないとわかった。

①は大学入試ではきわめて頻繁に登場する。
正確には
「線分 AB から AC に、反時計回りを正としてはかった角をθ とすると①が成り立つ。」
である。これも tan の加法定理から簡単に導かれる。
教科書で、導きかたも含めて確認しておこう。

$\boxed{\text{第7問}}$ ちょっと簡単ですが

息抜きに等差数列の問題です。

等差数列$\{a_n\}$が、次の条件を満たすとき、一般項a_n

をnの式で表して下さい。

$$a_0 = 3\,,\ a_7 = 38$$

第7問　解答例と解説

　まず、公差をdとします。
ここで、いきなり$a_n=3+(n-1)d$とおいた人はいませんか？　教科書では、等差数列の一般項は　初項＋$(n-1)d$と書いてあり、教科書に出ている問題では、初項はa_1と決められています。ところが大学入試では、そうとは限りません。

　私は　a_nの小さな文字（添え字）nを「項番号」と呼んでいます。例えば、a_2，a_5，a_{19}　の項番号はそれぞれ 2,5,19 になります。

　さて、「等差数列は項番号が１増えるごとに値が公差dだけ増える」数列だと考えれば、

　公式　$a_n=a_m+(n-m)d$

が成り立ちます。
a_nはa_mより項番号が$n-m$だけ大きいので、値は$(n-m)d$大きいというわけです。

したがって、この問題では

$a_n=a_0+(n-0)d=3+nd$

$a_7=3+7d=38$　より$d=5$

$\therefore$　$a_n=3+5n$

第8問　これも簡単

前問の「項番号の差」に注意を向けてください。

等差数列$\{a_n\}$が、次の条件を満たすとき、

初項a_1、公差d、一般項a_nを求めてください。

$$a_5+a_7+a_{10}=24 \cdots ①$$
$$a_6+a_9+a_{13}=42 \cdots ②$$

第8問　解答例と解説

公差を d とすると、項番号の差から

$a_6 = a_5 + d$, $a_9 = a_7 + 2d$, $a_{13} = a_{10} + 3d$

　したがって②の左辺は①の左辺より $6d$ だけ大きいことがわかります。

　右辺の差から $6d = 42 - 24 = 18$

$$\therefore d = 3$$

一方、　$a_5 = a_1 + 4d$, $a_7 = a_1 + 6d$, $a_{10} = a_1 + 9d$

より、　①の左辺＝$3a_1 + 19d$

$$3a_1 + 57 = 24$$

$$a_1 = -11$$

以上から

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$= -11 + 3(n-1)$$ あ

$$= 3n - 14$$

どうやっても良いのですが

公式　$a_n = a_m + (n-m)d$

を自在に使えるようになってください。

$\boxed{\text{第9問}}$　制限時間 10 分

$(x+1)(x+2)$ は正の実数であり、その小数部分が x と等しい。このとき実数 x の値を求めよ。

第9問　解答例と解説

問題文から

$0 \leqq x < 1$ ･･･①　（x は小数部分だから）

またこのとき $(x+1)(x+2)$ は正の実数になっている。

さらに、（その数）から（その数の小数部分）を引くと整数になることから。

$k = (x+1)(x+2) - x = x^2 + 2x + 2$ は整数･･･②

が得られる。

$k = (x+1)^2 + 1$　（$0 \leqq x < 1$）より

$2 \leqq k < 5$

②により

$k = 2, 3, 4$

$k = 2$ のとき①②より　$x = 0$

$k = 3$ のとき①②より　$x = -1 + \sqrt{2}$

$k = 4$ のとき①②より　$x = -1 + \sqrt{3}$

以上から

$x = 0\ , -1 + \sqrt{2}\ , -1 + \sqrt{3}$

$\boxed{\text{第10問}}$ 前問の復習です

実数 x に対して、x を越えない最大の整数を

$[x]$ と書き表すことにします。このとき

方程式　　$[x]=3x-5$

を解いて下さい。

第10問　解答例と解説

$[A]=B$　という式は

B は整数・・・①

$o \leqq A-B<1$・・・②

$A=x$　、　$B=3x-5$ を代入して

$3x-5=n$　(n は整数)・・・①

$0 \leqq x-(3x-5)<1$　・・・②

①より $x=\dfrac{n+5}{3}$　これを②に代入して

$$0 \leqq -2\cdot\frac{n+5}{3}+5<1$$

これを解いて　$1<n \leqq \dfrac{5}{2}$

n　は整数だから $n=2$

① $3x-5=2$ より

$$x=\frac{7}{3}$$

第11問　　制限時間 10 分

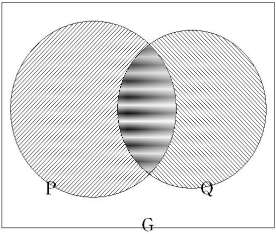
p,q を互いに異なる素数とする。

pq 以下の正の整数全体からなる集合を G とするとき、以下の問いに答えて下さい。

1）集合 G の要素で p,q のどちらでも割り切れない数は何個あるでしょう。

2）集合 G の要素で p,q のどちらでも割り切れない数の総和を求めて下さい。

第11問　解答例と解説



左のように、G の部分集合で考えます。
集合 P は p の倍数からなる集合、集合 Q は q の倍数からなる集合です。$P\cap Q$ は要素1個だけからなる集合で
$P\cap Q=\{pq\}$　です

集合 A の要素の個数を n(A)、その和を S(A)と書くことにしましょう。すると、

n(G)＝ pq　　n(P)＝ $pq\div p=q$

n(Q)＝ $pq\div q=p$　　n($P\cap Q$)＝１

$$S(G)=1+2+3+\cdots+pq=\frac{(1+pq)pq}{2}$$

$$S(P)=p+2p+3p+\cdots+pq=\frac{(p+pq)q}{2}$$

$$S(Q)=q+2q+3q+\cdots+pq=\frac{(q+pq)p}{2}$$

$S(P\cap Q)=pq$　　　このことから

１）$S(G)-S(P)-S(Q)+S(P\cap Q)=(p-1)(q-1)$

２）$S(G)-S(P)-S(Q)+S(P\cap Q)$

$$=\frac{pq(p-1)(q-1)}{2}$$

第12問　　制限時間５分

p, q がともに３より大きな素数であるとき、その和または差は６で割り切れることを示せ

第12問　解答例と解説

　６で割った余りを考えるには、整数全体を、６で割った余りで分類して考える、６で割った余りが
０のもの　…　６Ｎの形（Ｎは整数）　　　…　(0)
１のもの　…　６Ｎ＋１の形（Ｎは整数）　…　(1)
２のもの　…　６Ｎ＋２の形（Ｎは整数）　…　(2)
３のもの　…　６Ｎ＋３の形（Ｎは整数）　…　(3)
４のもの　…　６Ｎ＋４の形（Ｎは整数）　…　(4)
５のもの　…　６Ｎ＋５の形（Ｎは整数）　…　(5)
　このように、整数全体を分類すると、３より大きな素数は(1)か(5)のどちらかに含まれる。
なぜなら、(0)に素数は含まれないし、(2)は 2(3N+1)と書けるから素数は２のみ、(3)は 3(2N+!)で素数は３のみである、(4)は 2(3N+2)だから素数を含まない。
　(1)または(5)に含まれる２数の計算

(6A+1)－(6B+1)＝6(A－B)　　　　(1)－(1)
(6A+1)+(6B+5)＝6(A+B+1)　　　　(1)＋(5)
(6A+5)－(6B+5)＝6(A－B)　　　　(5)－(5)

　から、和、差のどちらかは必ず６の倍数になることがわかる。
（同じ剰余類に属する数どうしの差は６の倍数でになることは当然ですね、同じ剰余類に属する数を小さい方から並べると、例えば剰余類(5)　5,11,17,・・・　と公差６の等差数列になりますから）

$\boxed{\text{第13問}}$　前問の類題です

　ｐは 5 以上の素数でｐ+2 も素数である。このときｐ+1 は 6 の倍数であることを示せ。

第13問　解答例と解説

前問で行なった整数の分類（これを剰余類というのだが）によれば、３より大きい（５以上の）素数は、
6N+1 または 6N+5　(N は整数)の形に表すことができる。

それらの素数が同じ分類の数同士であれば、その差は６の倍数となるから、差が２になるのは、その２素数が異なる分類に属する場合である。

したがって
$p=6A+5$　（A は整数）とおけることから
$p+1=6(A+1)$　は６の倍数である。

$\boxed{\text{第14問}}$　　制限時間 10 分

異なる$n+1$個の整数がある。これらの中から 2 数を選んで、その差がnで割り切れるようにできることを示せ。

第14問　解答例と解説

５つの部屋に６人が泊まろうとすれば、どれかの部屋には必ず２人以上泊まらなければならない。当たり前ですね。これをディリクレの部屋割り論法というんですが、この問題ではこれを使います。

n で割った余りが問題ですから、整数全体を、n で割った余りが、

０のもの･･･(0)　　１のもの･･･(1)　　２のもの･･･(2)

・・・・・　$n-1$ のもの･･･($n-1$)

の n 個の剰余類に分けておきます。

すると、どのように $n+1$ 個の数を選んでも、どれかの剰余類には２個以上存在することになります。

同じ剰余類に属する２数を選べば、その２数の差は n の倍数だから「n で割り切れる」ことがわかります。

どうですか、この論法、使ってみたいと思いませんか？
この論法を使うためには、自分で「部屋」に相当するものを考えなければなりません。

次に２問、練習問題を用意しました。考えてみて下さい。

第15問

制限時間５分

１から１０までの 10 個の数の中から、６個の数をどのように選んでも、その中に和が１１になる２数が必ず含まれることを示せ。

第15問　解答例と解説

1から10までの数を

$$\{1,10\},\{2,9\},\{3,8\},\{4,7\},\{5,6\}$$

の5つの組に分けてみる。

　このなかから、6個の数をどのように選んだとしても、
　5つの組のうちのどれか組の両方の数を選ぶことになる。
　その2数の和は11になっているから、
　和が11になる2数が必ず含まれるとわかる。

どうでしょう。コツはつかめましたか？
対象となっているものの集まりを
選ぶ数より少ないグループに分ける
そうすると、どれかのグループから2つ以上
選ばなければならないから・・・・
という論法ですね。

それでは、もう1題練習してみましょう。

第16問

制限時間５分

座標平面上に５個の格子点（座標が共に整数の点）がある。このうちの２点を適当に選ぶと、その中点が格子点となることを示せ。

第16問　解答例と解説

整数の偶奇性（偶数、奇数の性質）に注目しましょう。

格子点の座標は
(1)　（偶数，偶数）
(2)　（偶数，奇数）
(3)　（奇数，偶数）
(4)　（奇数，奇数）
のどれかの形をしています。

　したがって、5 個の格子点をどのように選んでも、少なくとも 2 点は、偶奇性を考えると同じ形になっています。
　その 2 点を (a,b) , (c,d) とすると、その中点の

x 座標 $\dfrac{a+c}{2}$ 、y 座標 $\dfrac{b+d}{2}$ はいずれも整数になります。
何故ならば

偶数+偶数＝偶数
奇数+奇数＝偶数

　と偶奇性の一致した 2 数の和は必ず偶数となり、2 で割っても整数だからです。

　以上から、5 点から「2 点を適当に選ぶと、その中点が格子点となる」ことがわかりました。

$\boxed{\text{第17問}}$　制限時間 10 分

素数は無限に存在することを示せ。

第17問　解答例と解説

思いつかないかもしれませんが、有名な証明です。

「無限に存在する」ことを証明するには「有限である」と仮定して、矛盾を導きます（背理法です）

　素数は有限個で、その個数は N 個であるとします。それらの素数を小さい方から並べたものを、$p_1, p_2, \cdots, p_N$ とします。

　すると p_N より大きい自然数はすべて、$p_1, p_2, \cdots, p_N$ のうちのどれか、あるいはいくつかの倍数になっていることになります。

　ところで、いま

$$L = p_1 \cdot p_2 \cdots\cdot p_N + 1$$

（$p_1, p_2, \cdots, p_N$ 全部の積に 1 を足した数）を考えます。

すると、L は p_N より大きく、しかも、$p_1, p_2, \cdots, p_N$ のどの数で割っても I 余ることになり、どれかの倍数であることに矛盾します。

　したがって、「素数は有限個である」という仮定は誤りであることになります。

　以上より、素数は無限に存在することがわかった。

$\boxed{\text{第18問}}$ 制限時間 10 分

11、111、1111、……の中に平方数（整数の２乗）は含まれているでしょうか？

第18問　解答例と解説

　平方数の有名な性質として
「平方数を 4 で割った余りは 0 か 1 である」というのがあります。もっと詳しく言うと。
「偶数の 2 乗は 4 で割り切れ、奇数の 2 乗を 4 で割ると余りは 1 になる」ということになります。

何故でしょうか?

奇数は $2n-1\ (n=1,2,3,\cdots)$ と表すことができますが、

$$(2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 4n(n-1) + 1$$

ですから、奇数の 2 乗を 4 で割った余りは必ず 1 です。

　ところで、11、111、1111、……はどれも
（100 の倍数）+11＝（100 の倍数）+8+3
の形をしています。

100 は 4 の倍数ですから、これらの数はどれも 4 で割ると 3 余る数だとわかりますから、

「この中に平方数は含まれていない。」

ということがわかります。

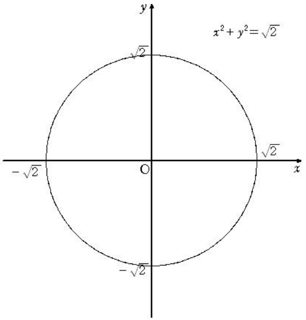
$\boxed{\text{第19問}}$　制限時間 10 分

円　$x^2+y^2=\sqrt{2}$

の円周上に x も y 有理数の点は存在しないことを示せ。

ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは既知とする。

第19問　解答例と解説



この円周上に１個も有理点（x, y 座標が共に有理数の点）が存在しないなんて信じられますか？私は高校生のときにこの問題に出会って、ものすごい衝撃を受けました。証明もまた、信じられないくらい簡単です。

　まず、x, y 座標が共に有理数の点 (a, b) がこの円周上に存在すると仮定します。

　点 (a, b) は

$$a^2+b^2=\sqrt{2}\cdots①$$

を満たします。

　①の左辺は有理数の四則計算でできていますから、やはり有理数ですが、右辺 $\sqrt{2}$ は無理数ですから矛盾です。

　したがって、この円周上に x, y 座標が共に有理数の点は存在しません。

第20問

制限時間 10 分

　下のように、連続した４つの自然数の積に１を加えた数Ｐは、ある自然数の２乗になる。

$$1\times 2\times 3\times 4+1=25=5^2$$

$$2\times 3\times 4\times 5+1=121=11^2$$

　このとき、次の問いに答えよ。

１）連続した４整数のうちで、最小の自然数を x として、数Ｐを x の式で表せ。（展開する必要はない）

２）数 $8\times 9\times 10\times 11+1$ はどんな自然数の２乗になるか答えよ。

第20問　解答例と解説

1）$P = x(x+1)(x+2)(x+3)+1$

2）$P = x(x+3)\cdot(x+1)(x+2)+1$

$= (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$

$= A(A+2)+1$　（ただし $A = x^2+3x$）

$= (A+1)^2$

$x = 8$　のとき　$A+1 = 8\times 11+1 = 89$

　数で計算すると不思議でも、文字式で計算してみるとこんなに簡単です。文字で考えると「形」が見えるが、数値では値しか見えないというわけです。

例えば

77^2-23^2　は

a^2-b^2 の形だと思えば

$77^2-23^2 = (77-23)(77+23) = 54\times 100 = 5400$

逆に

47×53 だったら

47×53

$= (50-3)(50+3) = 50^2-3^2 = 2500-9 = 2491$

$\boxed{\text{第 21 問}}$ 逆関数

$3^{-\log_3 5}$ の値を求めよ。

第 21 問　解答例と解説

$y = \log_a x$ ⋯ ①　は

$x = a^y$ ⋯⋯ ②　と書き直すことができます。

ところで、

①を②に代入すると　$x = a^{\log_a x}$ ⋯ ③

②を①に代入すると　$y = \log_a a^y$ ⋯ ④

　という恒等式をつくることができます。④はすぐに納得がいきますが、③を初めてみたときは大抵びっくりします。

③より　$3^{-\log_3 5} = 3^{\log_3 5^{-1}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$　となります。

ところで、$f(x) = a^x$ と $g(x) = \log_a x$　という 2 つの関数はお互いに「逆関数」になっています。

　逆関数というのは、2 つの関数をどの順番で作用させても元に戻るという性質を持った関数です。この場合

$f(g(x)) = a^{g(x)} = a^{\log_a x} = x \leftarrow$　元の x に戻る

$g(f(x)) = \log_a f(x) = \log_a a^x = x \leftarrow$ 元の x に戻る

となり、逆関数の性質を理解していれば当たり前だと思うことが出来ます。

$\boxed{\text{第 22 問}}$　2 乗のルートは？

$-1 \leqq x \leqq 2$　のとき

$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$　の値を求めよ。

第 22 問　解答例と解説

「2 乗する」と「ルートする」は前問の「逆関数」の関係になっているような気がしますが。

「ルートして 2 乗する」は、　$(\sqrt{x})^2 = x$　と元の x に戻るのですが、

「2 乗してルートする」は、$\sqrt{x^2} = |x|$ となります。

「2 乗のルートは絶対値」なのです。

たとえば、$x = -2$ のときは

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = -(-2) = -x$$

となります。

ルートの中身が、数値の場合は問題ないのですが、文字式の場合、よく間違えます。

$-1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = -(x-2) = -x + 2$$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = x + 1$$ となります。

したがって、

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3$$

$\boxed{\text{第 23 問}}$　分数不等式(1)

$\dfrac{x-2}{x+1} \geqq 0$ を解け。

第 23 問　解答例と解説

分数の値が正になるのは、
「分母も分子も正」または「分母も分子も負」のときです
このことは「分母×分子が正」と言い換えることができます。
すなわち、

$$\frac{B}{A} > 0 \Leftrightarrow AB > 0$$

いっぽう、分数の値が負になるのは、「分母と分子が異符号」のときで、「分母×分子が負」と言い換えることができます。
すなわち、

$$\frac{B}{A} < 0 \Leftrightarrow AB < 0$$

ところで、分数の値が 0 になるのは分子が 0 で分母が 0 でないときですから、

$$\frac{B}{A} \geqq 0 \Leftrightarrow AB \geqq 0 \text{ かつ } A \neq 0$$

$$\frac{B}{A} \leqq 0 \Leftrightarrow AB \leqq 0 \text{ かつ } A \neq 0$$

と上と同じ形にまとめることができます。

この問題では

$$\frac{x-2}{x+1} \geqq 0 \quad \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geqq 0 \text{ かつ } x+1 \neq 0$$

となり、解は「$x < -1$, $2 \leqq x$ 」となります。

$\boxed{\text{第 24 問}}$　分数不等式(2)

次の不等式を解け。

(1) $\dfrac{3}{x-2} \geqq 2$

(2) $\dfrac{3}{x-2} \leqq x$

第 24 問　解答例と解説

（1）　$2-\dfrac{3}{x-2} \leqq 0$　と変形します

左辺を計算して

$$\frac{2x-7}{x-2} \leqq 0 \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} (x-2)(2x-7) \leqq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$$

これを解いて　$2 < x \leqq \dfrac{7}{2}$

（2）　$x-\dfrac{3}{x-2} \geqq 0$

$$\frac{x^2-2x-3}{x-2} \geqq 0$$

$$\begin{cases} (x-2)(x-3)(x+1) \geqq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$$

これを解いて

$-1 \leqq x < 2\ ,\ 3 \leqq x$

第 25 問　　解と係数？

2 次方程式　$x^2-3x+1=0$

の 2 解をα , β とするとき、(暗算で)

次式の値を求めてください。

（1）$(\alpha^2-4\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)-\alpha\beta$

（2）$(2-\alpha)(2-\beta)$

第 25 問　解答例と解説

$x^2-3x+1=0$

の 2 解をα , β　とするとき、

$\alpha+\beta=3$ … ①

$\alpha\beta=1$ … ②

ここまでは、誰でも思い出してくれるんですが、

α , β　は$x^2-3x+1=0$　を満たすから

$\alpha^2-3\alpha+1=0$　より$\alpha^2=3\alpha-1$ … ③

$\beta^2-3\beta+1=0$　より$\beta^2=3\beta-1$ … ④

や、恒等式　$x^2-3x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$ … ⑤

も思い出して欲しい。

③④は「次数下げ」によく使います。

（1）③④を代入すると

$(\alpha^2-4\alpha+1)(\beta^2-4\beta+1)-\alpha\beta$

$=(-\alpha)(-\beta)-\alpha\beta=0$

（2）⑤の両辺に$x=2$　を代入して

$2^2-3\cdot 2+1=(2-\alpha)(2-\beta)$

左辺の値を計算して　-1　となります。

第 26 問　　次数下げ

2 次方程式　$x^2-4x+2=0$ の 2 解をα , β とするとき、

すべての自然数n について

$\alpha^n+\beta^n$　が 4 の倍数であることを示せ

第 26 問　解答例と解説

$\alpha+\beta=4$ $\cdots$ ①

$\alpha\beta=2$ $\cdots$ ②

$\alpha^2=4\alpha-2$$\cdots$ ③

$\beta^2=4\beta-2$$\cdots$ ④

③+④より

$\alpha^2+\beta^2=4(\alpha+\beta)-4=12$

となり、$n=1,2$ のとき成立することがわかります。

ところで③④から

$\alpha^{k+2}=4\alpha^{k+1}-2\alpha^k$ $\cdots$ ⑤

$\beta^{k+2}=4\beta^{k+1}-2\beta^k$ $\cdots$ ⑥

が成り立ちます

⑤+⑥より

$(\alpha^{k+2}+\beta^{k+2})=4(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-2(\alpha^k+\beta^k)$ $\cdots$ ⑦

式⑦から、$n=k,k+1$ のとき成り立てば、$n=k+2$ のときも成り立つことが言えますね。

　したがって、すべての自然数 n について

$\alpha^n+\beta^n$　が 4 の倍数であることがわかった。

第 27 問　前問の続きです

2 次方程式　$x^2-4x+2=0$ の 2 解を α , β とする（ただし $\alpha>\beta$ とする）とき、

α^{2008} 以下の最大の整数を 4 で割った余りを求めよ（東大 2003 改）

第 27 問　解答例と解説

前問から$\alpha^{2008}+\beta^{2008}$　は 4 の倍数だとわかっています。

ところで、α , β　を実際に求めてみると

$\alpha = 2+\sqrt{2}$, $\beta = 2-\sqrt{2}$　です

ここで、β^{2008} はどんな値だと思いますか？

（このへんで解説を読むのをやめて考えてみることをお勧めします。）

$0<\beta<1$　だから、

$0<\beta^{2008}<1$

すなわち

$0<(\alpha^{2008}+\beta^{2008})-\alpha^{2008}<1$

この式から

$(\alpha^{2008}+\beta^{2008})-1<\alpha^{2008}<(\alpha^{2008}+\beta^{2008})$

ですから

α^{2008} 以下の最大の整数は$\alpha^{2008}+\beta^{2008}-1$

とわかります。したがって、それを 4 で割った余りは

3　とわかります。

$\boxed{\text{第 28 問}}$　暗算で 5 分以内

2 次方程式

$x^2-3x+1=0$ の 2 解を α , β とし、実数

A , B が

$A\alpha+B\beta=1\cdots$ ①

$A\alpha^2+B\beta^2=2\ \cdots$ ②

を満たすとき、

1） $A\alpha^3+B\beta^3$ の値を求めよ。

2） $A\alpha^4+B\beta^4$ の値を求めよ。

第 28 問　解答例と解説

1）A , B の値を求めようとした人は、この先を読まずにもう少し考えてください。（暗算では無理だよね）

α , β は、$\alpha^2-3\alpha+1=0$, $\beta^2-3\beta+1=0$
を満たします。したがって、

$\alpha^2=3\alpha-1$ … ③

$\beta^2=3\beta-1$ … ④

が成り立ちます。（次数下げの式ですね）
③に $A\alpha$ 、④に $B\beta$ を掛けて、

$A\alpha^3=3A\alpha^2-A\alpha$ … ⑤

$B\beta^3=3B\beta^2-B\beta$ … ⑥

⑤⑥を辺々加えると

$$A\alpha^3+B\beta^3=3(A\alpha^2+B\beta^2)-(A\alpha+B\beta)$$
$$=3\cdot 2-1=5$$

2）同様に考えて（わかりますね）

$$A\alpha^4+B\beta^4=3(A\alpha^3+B\beta^3)-(A\alpha^2+B\beta^2)$$
$$=3\cdot 5-2=13$$

とわかります。

第 29 問

2 次方程式

$x^2-3x+1=0$ の 2 解を α , β とします。

さて、α , β を公比とする 2 つの等比数列（それぞれの初項を A, B とする）の和を一般項とする数列

$\{a_n\}$： $a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$ は

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$$

を満たすことを示してください。

第 29 問　解答例と解説

$\alpha^2 = 3\alpha - 1$ … ①

$\beta^2 = 3\beta - 1$ … ②

から、前問と同じように

$$(A\alpha^{n+1} + B\beta^{n+1}) = 3(A\alpha^n + B\beta^n) - (A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1})$$

すなわち

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$　を示すことができますから、

$a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$　が成り立つとわかります。

　ところで、

2 次方程式　$x^2 + px + q = 0$ の 2 解を α , β とし、$\alpha \neq \beta$ であるとき、（$p^2 - 4q \neq 0$）

漸化式　$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$　を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$ で表されます。係数の A, B は

$A + B = a_1$

$A\alpha + B\beta = a_2$

を解いて求めることができます。

第 30 問　東大文 97 年　部品

実数a,b が

$a+b=2$ … ①

$a^2+b^2=16$ … ②

をみたしている。

このとき、n を 2 以上の整数とするとき

a^n+b^n は 4 で割り切れる整数であることを示せ。

第 30 問　解答例と解説

$a+b=2 \cdots$ ①

$a^2+b^2=16 \cdots$ ②

より　$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=-12$

$ab=-6$

このことから

a,b は 2 次方程式

$x^2-2x-6=0$ の 2 解であり。

$a^2-2a-6=0$, $b^2-2b-6=0$　が成り立つ。

ここで、$p_n=a^n+b^n$ で与えられる数列$\{p_n\}$を考えると

$p_{n+2}-2p_{n+1}-6p_n=a^n(a^2-2a-6)+b^n(b^2-2b-6)=0$

$p_{n+2}=2p_{n+1}+6p_n \cdots$ ③

が成り立つ、（p_n,p_{n+1} が整数ならば p_{n+2} も整数であることはこの時点で明らか）さらに、

①②より　$p_1=2$, $p_2=16$, $p_3=44$

③より p_n,p_{n+1} と 2 個連続して 4 の倍数が続けば、その次の項 p_{n+2} も 4 の倍数になるから、p_4 以降はすべて 4 の倍数である。以上より、n を 2 以上の整数とするとき、

a^n+b^n は 4 で割り切れる整数である。

第 31 問　　不動点

漸化式

$a_{n+1} = 3a_n - 4$ ⋯ ①

によって定められる数列$\{a_n\}$がある、

その初項を、$a_1 = \alpha$ とすると、

$a_1 = a_2$ が成り立つとき、

α の値を求めよ。

また、このとき、

すべての自然数nについて

$a_n = \alpha$ が成り立つことを示せ。

第 31 問　解答例と解説

①より $a_2 = 3a_1 - 4$

$\alpha = 3\alpha - 4$ より　$\alpha = 2$

また $a_k = 2$ ならば $a_{k+1} = 3a_k - 4 = 3 \cdot 2 - 4 = 2$

となることから

すべての自然数 n について　$a_n = 2 = \alpha$ が成り立つこと

がわかります。

解答はこれで終わりですが、

初項がこのような数であれば、どこまでいっても、同じ値が続くわけで（この α を私は不動点と呼んでいます）、こんな簡単な数列はないわけです。

ところで初項がそれ以外の値のときはどうか？

たとえば、$a_1 = 7$ としてみます。

$a_1 = 7 \qquad = 2 + 5$

$a_2 = 3 \cdot a_1 - 4 = 17 \quad = 2 + 15$

$a_3 = 3 \cdot a_2 - 4 = 47 \quad = 2 + 45$

$a_4 = 3 \cdot a_3 - 4 = 137 \quad = 2 + 135$

このように、不動点 2 からのズレが、5,15,45,135 と初項 5 で公比 3 の等比数列の形で変化しています。

したがって

$a_n = 2 + 5 \cdot 3^{n-1}$

となります。

第 32 問

α が、$\alpha = p\alpha + q \cdots$ ①　を満たすとき
漸化式　$a_{n+1} = pa_n + q \ \cdots$ ②
によって定められる数列$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n = \alpha + (a_1 - \alpha)p^{n-1}$$

で与えられることを示せ

第 32 問　解答例と解説

②から①を辺々引いて、

$$a_{n+1}-\alpha = p(a_n-\alpha) \cdots \quad ③$$

さて、この③に、$n=1,2,3,4\cdots$を代入してみると

$$a_2-\alpha = p(a_1-\alpha)$$

$$a_3-\alpha = p(a_2-\alpha)$$

$$a_4-\alpha = p(a_3-\alpha)$$

$$a_5-\alpha = p(a_4-\alpha)$$

となり

数列

$$a_1-\alpha \ , \ a_2-\alpha \ , \ a_3-\alpha \ , \ a_4-\alpha \ , \cdots$$

が公比 p の等比数列になることを示しています。

初項はもちろん$a_1-\alpha$　ですね

したがって

$$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$$

となり

$$a_n=\alpha+(a_1-\alpha)p^{n-1}$$

が得られます。

第 33 問　　練習です

暗算で次の漸化式を解けますか？

1）$a_1 = 5$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$

2）$a_1 = 4$, $a_{n+1} = -2a_n + 3$

3）$a_1 = 0$, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{3}a_n + 2$

4）$a_1 = 1$, $2a_{n+1} - 3a_n + 3 = 0$

第 33 問　解答例と解説

1）$\alpha = 2\alpha - 3$ より $\alpha = 3$

$a_1 = 5 = 3 + 2$　だから　$a_n = 3 + 2 \cdot 2^{n-1} = 3 + 2^n$

2）$\alpha = -2\alpha + 3$ より $\alpha = 1$

$a_1 = 4 = 1 + 3$　だから　$a_n = 1 + 3 \cdot (-2)^{n-1}$

3）$\alpha = -\dfrac{1}{3}\alpha + 2$ より $\alpha = \dfrac{3}{2}$

$a_1 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}$　だから　$a_n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} \cdot (-\dfrac{1}{3})^{n-1}$

4）$2\alpha - 3\alpha + 3 = 0$ より $\alpha = 3$

また漸化式は

$a_{n+1} = \dfrac{3}{2}a_n - \dfrac{3}{2}$ と変形できる

$a_1 = 1 = 3 - 2$　だから　$a_n = 3 - 2 \cdot (\dfrac{3}{2})^{n-1}$

「漸化式を解け」という問題であれば、第 32 問の解説のように解けばよいのですが、このように、「暗算で解ける」ということは、「先が見える」ことにつながります。

このタイプの漸化式を「2 項間漸化式」と呼んでいますが、よく出題されるのは、確率の問題とむすびついた形です。

第 34 問

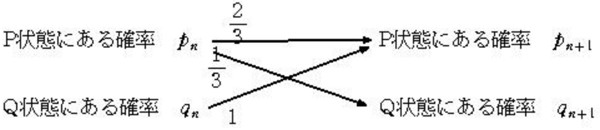
箱 P と Q があり
P には白玉 2 個と赤球 1 個が
Q には白球 1 個が入っています
P に入っている 3 個から任意に 1 個を選んで、Q の中に入っている玉と入れ替えるという試行を n 回続けてやったあと、箱 P に赤球が入っている確率 p_n を求めよ。

第 34 問　解答例と解説

　赤玉は１個しかありませんから、試行を行うたびに
赤球が P に入っている：P 状態
赤球が Q に入っている：Q 状態
の二つの状態を行ったり]来たりするわけです。
　もうすこし詳しく考えると

P 状態からは確率 $\dfrac{2}{3}$ で P 状態へ、確率 $\dfrac{1}{3}$ で Q 状態へ
Q 状態からは確率 1 で P 状態へ移行することがわかります。

（n 回目の後）　　　　　　　　　　（n +1 回目の後）



と考えると

$$P_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+q_n \cdots ①\qquad q_{n+1}=\frac{1}{3}p_n \cdots ②$$

さらに　$p_n+q_n=1$ が各 n について成り立ちます。

したがって、漸化式 $p_{n+1}=-\dfrac{1}{3}p_n+1 \cdots$ ③が成り立つ。

$p_1=\dfrac{2}{3}$ から、$p_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{12}\cdot(-\dfrac{1}{3})^{n-1}$

$\boxed{\text{第 35 問}}$　名大改

　サイコロを n 回振ったとき、出た目の和が 7 の倍数となる確率 p_n を求めよ。

第 35 問　解答例と解説

　今度は、それまで出た目の和が
7 の倍数になっている状態　：P 状態
7 の倍数になっていない状態：Q 状態
n 回振ったあと、P 状態にある確率 p_n と、Q 状態にある確率 q_n の関係を第 34 問と同様に調べます。
さて、P 状態（それまでの和が 7 の倍数）から次の 7 の倍数に移るには、最低でも 7 が出なければならないのですが、それはありえません。P 状態からは確率 1 で Q 状態へ移る。
いっぽう、Q 状態（それまでの和が 7 の倍数+m）で、
m＝1,2,3,4,5,6 の状態では、その次に P 状態に移るのは
7－m の目が出ればよいから、Q 状態からは $\dfrac{1}{6}$ の確率で P 状態へ $\dfrac{5}{6}$ の確率で Q 状態へ移行するとわかる。
したがって、

$$p_{n+1} = \frac{1}{6}q_n \ , \quad q_{n+1} = p_n + \frac{5}{6}q_n \ , \ p_n + q_n = 1$$

などが得られます。したがって

$$p_1 = 0 \ , \ p_{n+1} = -\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}$$ となり

$$p_n = \frac{1}{7} - \frac{1}{7}(-\frac{1}{6})^{n-1}$$ となる。

$\boxed{\text{第 36 問}}$　不等式感覚

$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で、次の方程式の解を求めよ。

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

（2007 年東北大後期　部品）

第 36 問　解答例と解説

いきなり式変形をしようと力む前に…。

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ は

　$\sin x$, $\cos x$ の２乗和が １ であることを示していますが、問題の方程式では左辺が３乗和です。

絶対値が１より小さい数は、２乗３乗４乗してゆくと、だんだん０に近づくわけで...

$\sin x \leqq 1 \cdots$ ①の両辺に、$\sin^2 x$ $(\geqq 0)$ を掛けて

$\sin^3 x \leqq \sin^2 x \cdots$ ②　　同様にして

$\cos^3 x \leqq \cos^2 x \cdots$ ③

辺々加えて　$\sin^3 x+\cos^3 x \leqq 1 \cdots$ ④

④で等号が成立するのは②③でともに等号が成立するときに限られるから

$$\begin{cases}(\sin x-1)\sin^2 x=0\\(\cos x-1)\cos^2 x=0\end{cases}$$

を解いて

$$(\sin x, \cos x)=(1, 0), (0, 1)$$

$$\therefore x=0, \frac{\pi}{2}$$

第 37 問　動くものを減らせ 1

x , y が、$-1 \leqq x \leqq 2$ ， $-3 \leqq y \leqq 2$ を満たす
実数であるとき、
$I = xy + 2x - y$ 　の最大値と最小値を求めよ。

第 37 問　解答例と解説

「数学の問題を解く」ということは「わからない」から「わかった」へのドラマをつくることです。ではこの問題の「わからなさ」とはなんでしょう。

それは「2 つの文字 x, y の値が別々に動く」ことです。「2 つ以上のものが動く」ときなんらかの手段で「動くものが 1 つだけの状態」をつくります。

たとえば、y にいくつか値を代入してみればよい。

$y=1$ を代入してみると $I = xy+2x-y=3x-1$

$y=-3$ を代入してみると $I = xy+2x-y=-x+3$

となり、I は x の一次関数です。y にどんな値を代入しても一次関数（か定数）です。一次関数であれば最大値や最小値を求めるのは簡単です。区間 $-1 \leqq x \leqq 2$ の両端の一方で最大値、他方で最小値をとることは明らかです。

$x=-1$ を代入した $I = xy+2x-y=-2y-2$

$x=2$ を代入した $I = xy+2x-y=y+4$

の $-3 \leqq y \leqq 2$ でとる値のなかに最大値も最小値も含まれることがわかります。

したがって

最大値は $(x, y)=(2, 2)$ のとき $I=6$

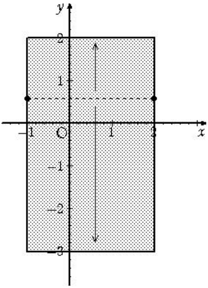
最小値は $(x, y)=(-1, 2)$ のとき $I=-6$

となります。

$\boxed{\text{第 38 問}}$　動くものを減らせ 2

x , y が、$-1 \leqq x \leqq 2$ ， $-3 \leqq y \leqq 2$ を満たす
実数であるとき、
$I = x^2 - 2xy + y$ 　の最大値と最小値を求めよ。

第 38 問　解答例と解説



(x, y) の領域は前問と同じです。
（左図）の領域で y の値を固定することは、y 座標が一定の線分の上で（図の点線のような）最大値や最小値を調べてみようということです。
そして、それらは一次関数の性質から
$x=-1, 2$ の部分（左端、右端）に存在することがわかったわけです。

この問題では、まず x の値を固定します。
何故だかわかりますか？

x に定数を代入すると、I は y の一次関数だからですね。
そうすると、$y=-3, 2$ のとき（つまり、領域の上端、下端）での値の中に最大値・最小値が存在することがわかります。

$y=-3$ のとき

$I = x^2 - 2xy + y = x^2 + 6x - 3 = (x+3)^2 - 12$

となり、$-1 \leqq x \leqq 2$ ，で $-8 \leqq I \leqq 13$

$y=2$ のとき

$I = x^2 - 2xy + y = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$

となり、$-1 \leqq x \leqq 2$ ，で $-2 \leqq I \leqq 7$

となります。したがって

I の最大値は 13、最小値は -8 とわかります。

$\boxed{\text{第 39 問}}$　動くものを減らせ 3

a がすべての実数値をとって変化するとき、

直線 $y = 2ax - a^2$　…　①

の通りうる領域を図示せよ。

第 39 問　解答例と解説

直線　$y = 2ax - a^2$　…　①　は、たとえば、

点 $(1, 2)$ を通ることができるだろうか？

このように考えてみよう。

①に、この点の座標を代入してみる。すると、

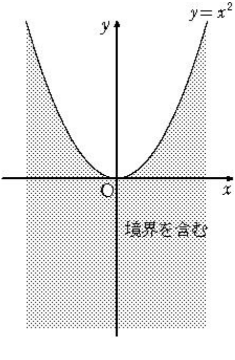
$2 = 2a - a^2$ すなわち $a^2 - 2a + 2 = 0$ だから、

$a = 1 \pm i$ と a は実数でないことになってしまう。

それでは、点 $(1, -3)$ を通ることができるだろうか？

この場合は、$-3 = 2a - a^2$ だから $a = -1, 3$ と今度は a が実数で、この a の値を代入した直線①はたしかにこの点を通ることがわかります。

これらの考察から、①が点 (X, Y) を通るという条件はこれを①に代入した方程式



$$Y = 2aX - a^2$$

$$a^2 - 2Xa + Y = 0$$

これを解いて a を求めたとき、

a が実数であることだから、

$$X^2 - Y \geqq 0$$

$$Y \leqq X^2$$

となり左図が得られます。

$\boxed{\text{第 40 問}}$　動くものを減らせ 4

実数 x が $x \neq 1$ を満たすとき、

$k = x + \dfrac{4}{x-1}$ の取りうる値の範囲を求めよ。

第 40 問　解答例と解説

k が $k=1$ を満たすとすれば

$$1=x+\frac{4}{x-1}$$

変形して、$x^2-2x+5=0$ となり

$x=1\pm 2i$　（虚数）

ですから、x が実数であることに反します。

　それでは、$k=6$ のときはどうでしょう。

$6=x+\dfrac{4}{x-1}$ は $x^2-7x+10=0$ となり

$x=2,5$ が得られます。つまり、これらの値に対して

$k=6$　が成り立ちます。

以上の考察から、k を定数と仮定したときに

$$k=x+\frac{4}{x-1} \quad \cdots ①$$

を満たす実数 x が存在するような k の値の範囲を定めれば
よいことがわかります。

①を変形して

$$x^2-(k+1)x+k+4=0$$

これが実数解を持つから、

$(k+1)^2-4(k+4)\geqq 0$　これを解いて

$k\leqq -3$, $5\leqq k$ となります。

$\boxed{\text{第 41 問}}$　動くものを減らせ 5

2 次関数

$y=x^2-2x+3$ …　①　の取りうる値の範囲を求めよ。

（この問題については、初めて見る解法かもしれませんね?？）

第 41 問　解答例と解説

$y=(x-1)^2+2$ より $y \geqq 2$ で終わりですが、、ここでは前問と同じ考え方でやってみましょう。

$y=k$（定数）を満たす実数 x が存在する条件を求めます。

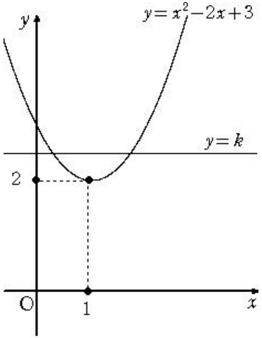
$k=x^2-2x+3$ が実数解を持つから、

二次方程式　$x^2-2x+3-k=0$ の判別式 $\geqq 0$

より、　$k-2 \geqq 0$

$k \geqq 2$ となり、$y \geqq 2$

この解法は、図形的にとらえると、



放物線

$y=x^2-2x+3$ … ①

と直線 $y=k$ が共有点を持つような k の値の範囲を求めればそれが y のとりうる値の範囲に一致するということを表します。

$\boxed{\text{第 42 問}}$　動くものを減らせ 6

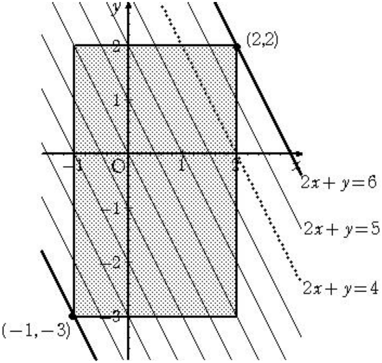
x , y が、$-1 \leqq x \leqq 2$ ， $-3 \leqq y \leqq 2$ を満たす実数であるとき、

$x+2y$ の取りうる値の範囲を求めよ。

（第 37・38 のようにやればできますが、今度は $x+2y$ の値を固定する考え方で解いてみましょう。教科書ではこちらの方が主流のようですが、どちらが、適用範囲が広いでしょうか?)

第 42 問　解答例と解説

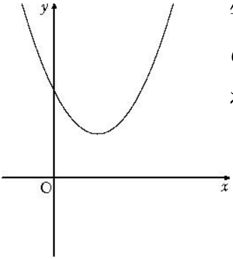
　$x+2y=k$ $\cdots$ ①　（ただし k は定数）
と置いてみます。
　そして、与えられた領域で、①を成り立たせる点が存在するような k の値の範囲を求めればよいのです。



　さて、$k=4$ を満たす点 (x,y) が与えられた領域内に存在するということを、図形的に言い換えると、
　直線 $2x+y=4$
（左図の点線）が領域を通過していることになります。
　ところで、点線は、
　与えられた領域を通過していますから、「k は 4 という値をとることができる」ということがわかります。
　ところで①をみたす点 (x,y) の全体は、
方程式 $y=-2x+k$ 、すなわち傾き -2 で y 切片が k の直線ですから、それらの直線（群）を描いてみると、この直線のうち、点 $(2,2)$ を通るものと点 $(-1,-3)$ を通るものを考えればよいから　$-5 \leqq 2x+y \leqq 6$ が得られます。

第 43 問　　放物線 1

2 次関数　$y = ax^2 + bx + c$ のグラフが



左図で表されるとき、

a , b , c , $D = b^2 - 4ac$ の正負を答えよ。

（見た瞬間にわかりますか？）

第 43 問　解答例と解説

グラフが下に凸だから、$a>0$。

y 軸とグラフの交点は$(0,c)$だから、$c>0$。

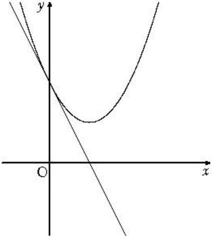
グラフと x 軸が共有点を持たないから、$D<0$。

ここまでは簡単ですね、

さて、b は、どのようにすれば、正負の判定ができるでしょうか？

ひとつの方法として、頂点の x 座標が　$\frac{-b}{2a}>0$ であることから a と b は異符号とわかり、$b<0$ が求まります。

でも、これだと「見た瞬間」ではありませんね。



実は、点$(0,c)$で曲線に接線を引いてみると、

この接線の方程式は

$$y=bx+c$$

になります。

$$ax^2+bx+c=bx+c$$

という方程式は、$ax^2=0$　と変形でき、これが

$x=0$ を重解に持つことから、直線 $y=bx+c$　が接線になっていることがわかります。

直線 $y=bx+c$　の傾きが負だから、$b<0$ が「瞬間的に」わかります。

第 44 問　　放物線 2

2 次関数　$f(x)=ax^2+bx+c$ について、

曲線 $y=f(x)$ 上の点　$(\alpha, f(\alpha))$ における

接線を表す 1 次関数を $g(x)$ とする。このとき、

$$f(x)-g(x)=a(x-\alpha)^2$$

が成り立つことを示してください。

第 44 問　解答例と解説

　まず、最初は計算でやってみましょうか。

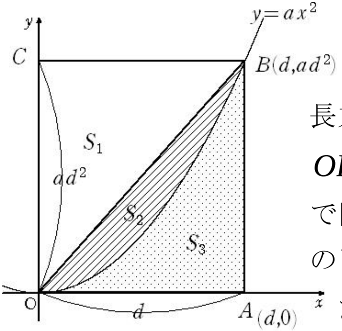
　曲線 $y=f(x)$ 上の点　$(\alpha, f(\alpha))$ における接線の方程式は、　$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$

したがって、　$g(x)=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$

$$\begin{aligned}
f(x)-g(x) &= f(x)-f(\alpha)-f'(\alpha)(x-\alpha) \\
&=(ax^2+bx+c)-(a\alpha^2+b\alpha+c)-(2a\alpha+b)(x-\alpha) \\
&=a(x+\alpha)(x-\alpha)+b(x-\alpha)-(2a\alpha+b)(x-\alpha) \\
&=(ax+a\alpha+b-2a\alpha-b)(x-\alpha) \\
&=a(x-\alpha)^2
\end{aligned}$$

　でも、このことは計算をしなくても当たり前なのです。
仮に、$g(x)=px+q$ としましょう。すると
$ax^2+bx+c=px+q$　という方程式は、重解 $x=\alpha$ を持ちます。
　したがって、
$(ax^2+bx+c)-(px+q)=a(x-\alpha)^2$
が成り立ちます。
これで、
$f(x)-g(x)=a(x-\alpha)^2$
を示すことができました。

第 45 問　放物線と面積 1



左図において、長方形$OABC$を線分OB,放物線$y=ax^2$で区切ってできる領域の面積S_1,S_2,S_3を求めよ。ただし、a,dは正とする。

第 45 問　解答例と解説

長方形$OABC = ad^3$

S_1 はその半分で

$$S_1 = \frac{1}{2}ad^3$$

$$S_3 = \int_0^d ax^2 dx = \left[\frac{1}{3}ax^3\right]_0^d = \frac{1}{3}ad^3$$

$S_1 + S_2 + S_3 = ad^3$ より

$$S_2 = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3})ad^3 = \frac{1}{6}ad^3$$

このように、

放物線と線分OBは、長方形$OABC$の面積を 1 とするとき

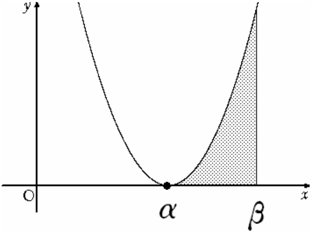
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ の 3 つの領域に分けることがわかりました。

比で表すと、$S_1 : S_2 : S_3 = 3:1:2$ となります。

この比はa, d の値によりません。点Bが放物線上のどこにあっても、常にこの関係が成り立つわけです。曲線で区切られているのにきっちりと整数比というのは美しいと思いませんか？ 逆に言うと、この美しい関係を保ちながら放物線はどこまでも進んで行くのですね。

第 46 問　放物線と面積 2

$$y = a(x - \alpha)^2$$



左図の領域の面積 S を求めよ

第 46 問　解答例と解説

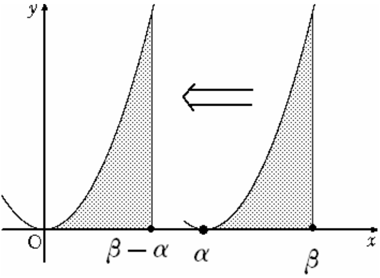
普通に計算すると、

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^2\,dx$$

ですが、

「領域の面積は、平行移動によって変わらない」

$$y=ax^2 \qquad y=a(x-\alpha)^2$$



このことから
左図のように
求める領域を
平行移動して

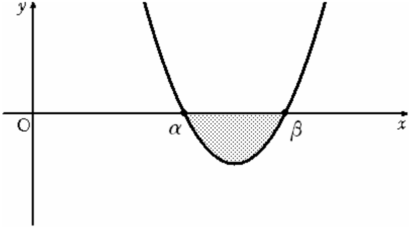
$$S=\int_{0}^{\beta-\alpha} ax^2dx=\left[\frac{1}{3}ax^3\right]_{0}^{\beta-\alpha}=\frac{a}{3}\left(\beta-\alpha\right)^3$$

数学Ⅲまで勉強した人は、置換積分でやれば良いのですが、
数学Ⅱの範囲内で計算するには、この方法が有効です。
次の第 47 問の計算も同じ考えでやってみます。

「積分区間の下端が 0 になるように、領域を平行移動すれば、計算が簡単になる」ということですね。

第 47 問　放物線と面積 3

$$y = a(x-\alpha)(x-\beta)$$



左図の領域の

面積 S を求めよ。

第 47 問　解答例と解説

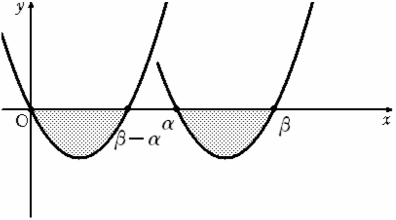
これも、普通であれば

$S=-\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx$　を計算するのですが、

計算はけっこう面倒です。

これも､グラフを x 方向に $-\alpha$ だけ並行移動したものを考えます。

$y=ax\{x-(\beta-\alpha)\}$　　$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$



すると

$$S=-\int_{0}^{\beta-\alpha} ax\{x-(\beta-\alpha)\}dx$$

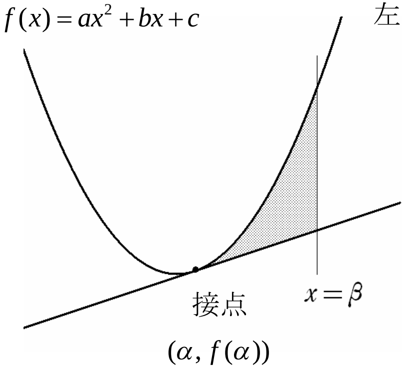
ここで、$\beta-\alpha=d$ とおくと、

$$S=-\int_{0}^{d} ax(x-d)dx=-\left[\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}adx^2\right]_0^d$$

$$=-\frac{1}{3}ad^3+\frac{1}{2}ad^3=\frac{a}{6}d^3=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

が得られます。

$\boxed{\text{第 48 問}}$　放物線と面積 4



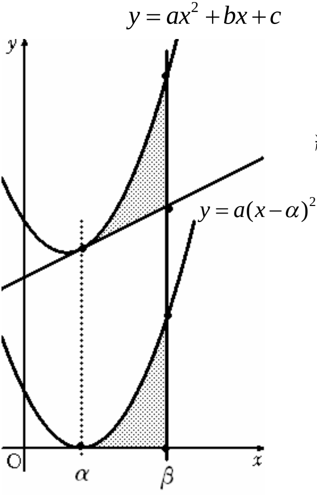
左図の領域の面積 S を a,α,β で表せ

第 48 問　解答例と解説

点$(\alpha, f(\alpha))$における接線を表す 1 次関数を$g(x)$とすると、第 44 問の結果から $f(x)-g(x)=a(x-\alpha)^2$ となります。これを、$x=\alpha$ から $x=\beta$ まで積分して、

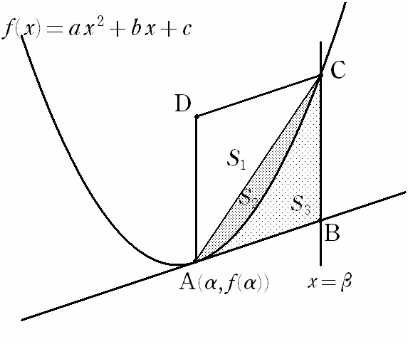
$S=\int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^2 dx$ となりますが、これは第 46 問と同じですから、

$S=\dfrac{a}{3}(\beta-\alpha)^3$ 　となります。



このことは、左図のように
求めたい領域（上の領域）を、
縦に細かく切って、その真下の
x 軸上に並べると
下の領域に一致すると
いうことになります。

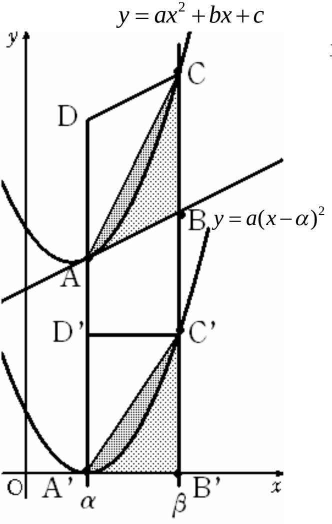
第 49 問　放物線と面積 5



左図において
面積 S_1, S_2, S_3 を
$a\ , d=\beta-\alpha$
で表せ。ただし、
四角形 $ABCD$ は
平行四辺形である。

第 49 問　解答例と解説

今までのストーリーからだいたい想像できると思うが、



平行四辺形 $ABCD$ において

$BC=B'C'=a(\beta-\alpha)^2=ad^2$

したがって平行四辺形

$ABCD$ の面積は ad^3 となる

S_1 はその半分で

$$S_1=\frac{a}{2}d^3$$

また、第 48 問から

$$S_3=\frac{a}{3}d^3$$

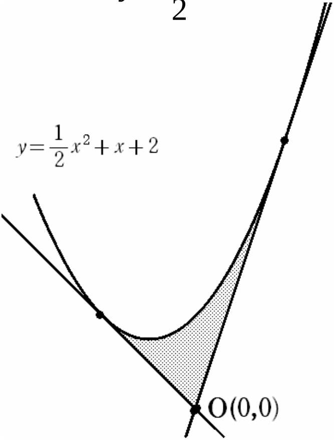
$S_1+S_2+S_3=ad^3$ より

$$S_2=\frac{a}{6}d^3$$

平行四辺形 $ABCD$ の境界と内部の領域を、縦に細かく（無限に細かく）切って、x 軸の上にストーンと落としてやると、長方形 $A'B'C'D'$ に一致するわけである。
そのとき、面積比も保たれるということになる。

第 50 問　　放物線と面積 6

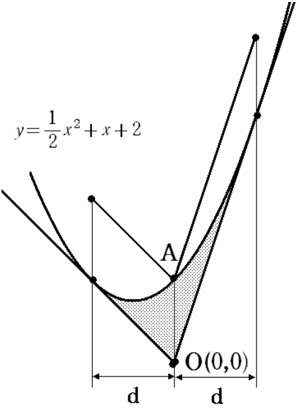
放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2+x+2$ に原点 O から引いた



2 本の接線と、この放物線とで囲まれる領域の面積 S を求めよ。

第 50 問　解答例と解説

　よく見かける問題ですが、あまり見かけない、しかも強力な方法で解いてみましょう。すべては第 49 問に書いてあります。



　左図のように考えます。まず、点 O とその真上にある曲線上の点 A（0,2）との距離は 2 だから

$$\frac{1}{2}d^2 = OA = 2$$

$$\therefore d = 2$$

したがって、求める領域のうち、線分 OA の左側の面積も右側の面積も

$$\frac{\frac{1}{2}}{3}d^3 = \frac{4}{3}$$ に等しい

$$\therefore \quad S = \frac{4}{3}\cdot 2 = \frac{8}{3}$$

接線の方程式をたてることなくできてしまったでしょう。