

第 27 問 解答例と解説

前問から $\alpha^{2008} + \beta^{2008}$ は 4 の倍数だとわかっています。

ところで、 α , β を実際に求めてみると

$$\alpha = 2 + \sqrt{2}, \beta = 2 - \sqrt{2} \text{ です}$$

ここで、 β^{2008} はどんな値だと思いますか？

(このへんで解説を読むのをやめて考えてみることをお勧めします。)

$0 < \beta < 1$ だから、

$$0 < \beta^{2008} < 1$$

すなわち

$$0 < (\alpha^{2008} + \beta^{2008}) - \alpha^{2008} < 1$$

この式から

$$(\alpha^{2008} + \beta^{2008}) - 1 < \alpha^{2008} < (\alpha^{2008} + \beta^{2008})$$

ですから

$$\alpha^{2008} \text{ 以下の最大の整数は } \alpha^{2008} + \beta^{2008} - 1$$

とわかります。したがって、それを 4 で割った余りは 3 とわかります。