第 31 問　解答例と解説

①より $a_2 = 3a_1 - 4$

$\alpha = 3\alpha - 4$ より　$\alpha = 2$

また $a_k = 2$ ならば $a_{k+1} = 3a_k - 4 = 3 \cdot 2 - 4 = 2$

となることから

すべての自然数 n について　$a_n = 2 = \alpha$ が成り立つこと

がわかります。

解答はこれで終わりですが、

初項がこのような数であれば、どこまでいっても、同じ値が続くわけで（この α を私は不動点と呼んでいます）、こんな簡単な数列はないわけです。

ところで初項がそれ以外の値のときはどうか？

たとえば、$a_1 = 7$ としてみます。

$$a_1 = 7 \qquad = 2 + 5$$

$$a_2 = 3 \cdot a_1 - 4 = 17 \quad = 2 + 15$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 - 4 = 47 \quad = 2 + 45$$

$$a_4 = 3 \cdot a_3 - 4 = 137 \quad = 2 + 135$$

このように、不動点 2 からのズレが、5,15,45,135 と初項 5 で公比 3 の等比数列の形で変化しています。

したがって

$$a_n = 2 + 5 \cdot 3^{n-1}$$

となります。