

第 34 問 解答例と解説

赤玉は 1 個しかありませんから、試行を行うたびに
 赤球が P に入っている：P 状態
 赤球が Q に入っている：Q 状態
 の二つの状態を行ったり来たりするわけです。

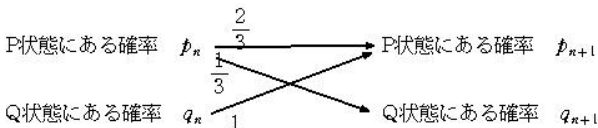
もうすこし詳しく考えると

P 状態からは確率 $\frac{2}{3}$ で P 状態へ、確率 $\frac{1}{3}$ で Q 状態へ

Q 状態からは確率 1 で P 状態へ移行することがわかります。

(n 回目の後)

(n+1 回目の後)



と考えると

$$P_{n+1} = \frac{2}{3} p_n + q_n \cdots \textcircled{1} \quad q_{n+1} = \frac{1}{3} p_n \cdots \textcircled{2}$$

さらに $p_n + q_n = 1$ が各 n について成り立ちます。

したがって、漸化式 $p_{n+1} = -\frac{1}{3} p_n + 1 \cdots \textcircled{3}$ が成り立つ。

$$p_1 = \frac{2}{3} \text{ から、 } p_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$