

第 44 問 解答例と解説

まず、最初は計算でやってみましょうか。

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線の方程式は、 $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

したがって、 $g(x) = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= f(x) - f(\alpha) - f'(\alpha)(x - \alpha) \\ &= (ax^2 + bx + c) - (a\alpha^2 + b\alpha + c) - (2a\alpha + b)(x - \alpha) \\ &= a(x + \alpha)(x - \alpha) + b(x - \alpha) - (2a\alpha + b)(x - \alpha) \\ &= (ax + a\alpha + b - 2a\alpha - b)(x - \alpha) \\ &= a(x - \alpha)^2 \end{aligned}$$

でも、このことは計算をしなくても当たり前なのです。
仮に、 $g(x) = px + q$ としましょう。すると

$ax^2 + bx + c = px + q$ という方程式は、重解 $x = \alpha$ を持ちます。

したがって、

$$(ax^2 + bx + c) - (px + q) = a(x - \alpha)^2$$

が成り立ちます。

これで、

$$f(x) - g(x) = a(x - \alpha)^2$$

を示すことができました。