微分演算子 D で物理を見る！（微分方程式入門）

　高校生の頃、数学で感動したことはいろいろあるが、その中でも、一瞬で世界の見え方が変わってしまうような体験もある。

　いまでは、高校のカリキュラムからほとんど消えてかけらぐらいしか見当たらないが、私の時代の高校 3 年生にとって基本的な「微分方程式」が解けるというのは理系の生徒にとって当たり前だった。

　物理の世界でも、有名なニュートンの方程式（古典力学）やシュレーディンガーの方程式（量子力学）など微分方程式を学ぶということは、そこからつながるいろいろな分野への入り口であり、わくわくする体験だった。

　例えば、「バネにつながれた重り」の運動は

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky \quad \cdots \quad ①$$

　電源を含まない RCL 回路だったら、

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=0 \quad \cdots②$$

　という微分方程式を解けばよい。(物理を取っていない人には何を言っているのやら…)

　ところで、この微分方程式を学んでいて出会った「演算子」という数学の新しい表現法には本当に驚かされたし、感動もした。

導関数を表す記号にはいろいろな流儀があって、$\dfrac{dy}{dt}$ は

$\dfrac{d}{dt}y$ 　と書かれることがある。

また　$\dfrac{d^2y}{dt^2}$ は $\dfrac{d^2}{dt^2}y=\left(\dfrac{d}{dt}\right)^2 y$ 　などと書かれる。

$\dfrac{d}{dt}$ 　は「次のものを t で一回微分せよ」という命令とみなすこともできる。これを微分演算子という。さらに

$\dfrac{d}{dt}=D$ と書くことにすると、

$\dfrac{d^2y}{dt^2}=D^2y$ 　となる。

いま、解きたい微分方程式が

$$\frac{dy}{dt}=\lambda y\cdots③$$

という形をしているとする。D を使うと、

$$Dy=\lambda y\cdots④$$

③「t で微分すると λ 倍になる」関数といえば、

$e^{\lambda t}$ をすぐに思いつきます。その任意定数倍も③を満たすから、③を満たす y は

$$y=Ae^{\lambda t}$$

という形をしていると想像できます。

実は、ライプニッツのつくった微分積分の記号はとんでもないマジックを用意してくれていて、③を

$\dfrac{dy}{y}=\lambda dt$ 　と分数のように変形して（変数 x,t の分離)、

両辺に積分記号をつける、

$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int\lambda dt$ 　　実際に積分すると、

$\log|y|=\lambda t+C$ 　（両辺の積分定数を右辺にまとめた）

$$|y|=e^{\lambda t+C}=e^Ce^{\lambda t}$$

$y=\pm e^Ce^{\lambda t}=Ae^{\lambda t}$ 　（$\mp e^C=A$ とした）

このように計算できます。

ところで、④の形をよく見てください。

何かを連想させるでしょう？

D が行列で y がベクトル、λ は固有値だと思うと、

$e^{\lambda t}$ が固有ベクトルのひとつで、$Ae^{\lambda t}$ はその全体の形を与えている。そのように見えませんか？

その連想は正しいのですが、今回は深入りしません。

④は　$(D-\lambda)y=0$

と書くことができますから。

$\boxed{(D-\lambda)y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=Ae^{\lambda t} \quad (A\text{ は任意の定数})}$

とまとめておきます。

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-6y=0$$

という微分方程式（2 階の常微分方程式といいます）

であれば、

$(D^2-D-6)y=0$ 　とします。

これを

$(D-3)(D+2)y=0$

　と書くと、$(D+2)y=Ae^{3t}\cdots$⑤

$(D+2)(D-3)y=0$

　と書くと、$(D-3)y=Be^{-2t}\cdots$⑥

⑤－⑥より

$5y=Ae^{3t}+Be^{-2t}$

A,B は不定の定数だから、$\dfrac{A}{5},\dfrac{B}{5}$ をあらためて A,B とおくと、 $y=Ae^{3t}+Be^{-2t}$

この例から、

2 次方程式　$x^2+px+q=0$ の 2 解を α,β とすると、
$(D^2+pD+q)y=0 \Leftrightarrow y=Ae^{\alpha t}+Be^{\beta t}$
（A,B は積分定数）

ここで、博士の愛した数式「オイラーの公式」について説明しよう

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

こう公式の中の e は自然対数の底、i はもちろん虚数単位の i だ。左辺は指数関数、右辺は三角関数で表されている。まったく別のものが等号で結ばれている。

不思議な感じがするが、きわめて役に立ち、しかも美しい公式として、誰からも愛されている公式である。

ここでこの公式を証明することはしないが、正しいことの状況証拠ぐらいは示しておこう。

1）$(\text{左辺})^2=(e^{i\theta})^2=e^{i2\theta}$

　$(\text{右辺})^2=(\cos\theta+i\sin\theta)^2$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta+i\cdot 2\sin\theta\cos\theta$

$=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$

2）左辺、右辺を θ について微分

左辺 $\Rightarrow \dfrac{d}{d\theta}e^{i\theta}=ie^{i\theta}$

右辺 $\Rightarrow \dfrac{d}{d\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=-\sin\theta+i\cos\theta=i(\cos\theta+i\sin\theta)$

3）左辺、右辺を θ について 2 回微分

左辺 $\Rightarrow \left(\dfrac{d}{d\theta}\right)^2 e^{i\theta}=i^2e^{i\theta}=-e^{i\theta}$

右辺 $\Rightarrow \left(\dfrac{d}{d\theta}\right)^2 (\cos\theta+i\sin\theta)$

$=\dfrac{d}{d\theta}(-\sin\theta+i\cos\theta)$

$=-\cos\theta-i\sin\theta=-(\cos\theta+i\sin\theta)$

4）指数法則と加法定理

$e^{i\alpha}e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)}$

$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta+i^2\sin\alpha\sin\beta$

$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$

$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$

見事ですね！

さて、次に

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+4y=0$

の解を求めてみましょう。

今度は、解には 2 個の積分定数がつくから、$t=0$ での条件（初期条件）を決めておきます。

（例題 7.2）$t=0$　で　$y=y_0$, $\dfrac{dy}{dt}=0$　の条件で

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+4y=0$　の解を求めよ。

（解）$(D^2+4)y=0$　だから　2 次方程式　$x^2+4=0$ の 2 解を求めて　$x=\pm 2i$

$\therefore y=Ae^{i2t}+Be^{-i2t}$

$=A(\cos 2t+i\sin 2t)+B(\cos 2t-i\sin 2t)$

$\dfrac{dy}{dt}=2iAe^{i2t}-2iBe^{-i2t}$

$t=0$　のとき、

$y=A+B=y_0$

$\dfrac{dy}{dt}=2iA-2iB=0$

$\therefore\quad A=B=\dfrac{y_0}{2}$

$y=\dfrac{y_0}{2}(\cos 2t+i\sin 2t)+\dfrac{y_0}{2}(\cos 2t-i\sin 2t)$

$=y_0\cos 2t$

初期条件を

$t=0$　で　$y=0$, $\dfrac{dy}{dt}=v_0$

と変えてみると

$$y=\frac{v_0}{2}\sin 2t$$

となる。

一般には

ω は正の定数とすると（物理的意味を考慮して）、

$(D^2+\omega^2)y=0 \Leftrightarrow y=Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}$

これに　$t=0$ で　$y=y_0$, $\dfrac{dy}{dt}=v_0$　という条件をつけてみると、

$$y=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+y_0\cos\omega t$$

$$=A_0\sin(\omega t+\alpha)$$

ただし $A_0=\sqrt{\left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2+{y_0}^2}$ ，$\tan\alpha=\dfrac{y_0\omega}{v_0}$

となる。これは角振動数 ω の単振動という現象を表している。

さて、微分方程式①は

$$D^2y=-\frac{k}{m}y$$

$(D^2+\dfrac{k}{m})y=0$　と変形して $\omega^2=\dfrac{k}{m}$ とおくと。

上と同じ形になり、

$x=A_0\sin(\omega t+\alpha)$

角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ から、振動の周期は $\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

となる。

（例題 7.3）$t=0$　で　$y=y_0$, $\dfrac{dy}{dt}=0$　の条件で

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}+5y=0$　の解を求めよ。

$(D^2+4D+5)y=0$　だから　$x^2+4x+5=0$　を解いて　$x=-2\pm i$

$$\therefore y=Ay_0e^{(-2+i)t}+By_0e^{(-2-i)t}$$

$$\frac{dy}{dt}=(-2+i)Ae^{(-2+i)t}+(-2-i)Be^{(-2-i)t}$$

初期条件より

$A+B=y_0$

$(-2+i)A+(-2-i)B=0$

これを解いて

$A=\dfrac{1}{2}(1-2i)y_0$, $B=\dfrac{1}{2}(1+2i)y_0$

$$y=\frac{1}{2}(1-2i)y_0e^{(-2+i)t}+\frac{1}{2}(1+2i)y_0e^{(-2-i)t}$$

$$=\frac{1}{2}y_0e^{-2t}\{(1-2i)e^{it}+(1+2i)e^{-it}\}$$

$$=y_0e^{-2t}(2\sin t+\cos t)=\sqrt{5}y_0e^{-2t}\sin(t+\alpha)$$

（$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$）

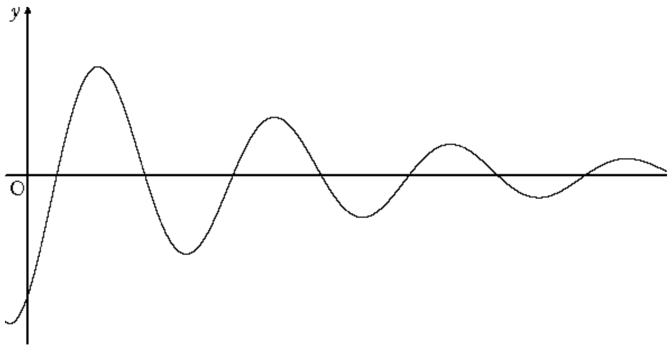
2 次方程式　$x^2+px+q=0$　の 2 解が虚数であるとき

その解が　$x=-\mu\pm\omega i$　ならば（μ,ω は正の実数）、

$(D^2+pD+q)y=0 \Leftrightarrow y=A_0e^{-\mu t}\sin(\omega t+\alpha)$

（これは減衰振動を表す）

このように、だんだん揺れが小さくなってゆく振動です。



$x=-\mu\pm\omega i$　の実部が（負の場合）その減衰の度合いを表し、虚部が振動の角振動数を表す。

電源を含まない RCL 回路を表す微分方程式、

$L\dfrac{d^2Q}{dt^2}+R\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{1}{C}Q=0$　…②

$(CLD^2+CRD+1)Q=0$

$CLx^2+CRx+1=0$

が虚数解を持つ、すなわち $CR^2<4L$ のとき

$$x=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2C}}\ i$$

となるから減衰振動することがわかる。

実は、高校で学ぶ物理のかなりの部分は、数種類の微分方程式で表現される。4 種類を追加しておこう。

$$Dy = -\mu(y - y_0) \Leftrightarrow y = y_0 + Ae^{-\mu t}$$

（過渡現象など）

$$D^2 y = 0 \Leftrightarrow y = A + Bt$$

（慣性運動など）

$$D^2 y = -g \Leftrightarrow y = A + Bt - \frac{1}{2}gt^2$$

（等加速度運動など）

$$D^2 y = -\omega^2 (y - y_0) \Leftrightarrow y = y_0 + A\sin(\omega t + \alpha)$$

（振動、円運動など）

　演算子による表現は、意味は最初の方程式と変わらないし、微分積分の世界の中だけでも方程式は解けるのですが、ずいぶん見通しがよくなります。

　微分積分という解析の世界にいたと思ったら、気がつくと、2 次方程式という代数の世界にいて、その解が物理的な意味を持って、微分積分の世界に戻っている。

　そんな不思議な感覚が魅力的でした。