ＰもＣもいらない順列組合せ

ーーーーーーーーファクトリアル・マジックの世界ーーーーーーーーー

by u1248
2007

$${}_5C_3 = \frac{5!}{3!2!} = [3,2]$$ 、$${}_5P_3 = \frac{5!}{1!1!1!2!} = [1,1,1,2]$$ さてこの式の意味は？

1．こんびねーしょん・ぱーみゅてーしょん

さて、もうそろそろ順列組合せの授業も終わる頃だから、僕の数学演習の時間は、その復習をしてみようね。

ところで、この分野をここまで勉強してきた感想はどうだい。

ころ　最初は簡単だと思ったんだけど、ＣとかＰとか色んな公式とか、考え方とかがでてきて、頭の中が混乱してしまいました

えり　微妙な言葉の解釈で場合の数が変わってしまうところがこわい。ＣかなとФ思ったらＰだったり、実は私のクラスはもう確率分野にはいっているんだけれど、ますます微妙さが増しているような気がします。

そうだね、今二人が言ったこと、そうだそうだとうなずいているひとが多いようだね。実は高校生のとき僕もそう感じていたのでよくわかります。

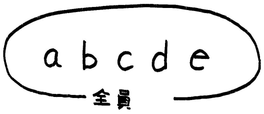
そういう時はあせらず根本に戻ってイメージを作り直すことが大切だ。

そこで、今日はＣとＰについて、くっきりとしたイメージを持つ事を目標に、いっしょに考えてみよう。

(1)　コンビネーションのイメージ

　まず、最初にコンビネーションのほうから始めよう。

たとえば、${}_5C_3$ のイメージというのは、最初に a,b,c,d,e の５人がいて



こんな感じだね

　この中から３人を選ぶ方法の数を表しているんだった。

ところで ${}_5C_3$ の値は計算できるかい？

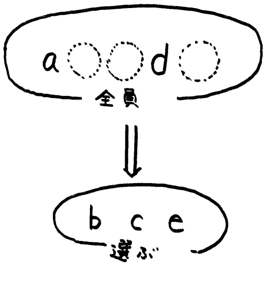
ころ　$${}_5C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$ です。

　そうだね。3人を選ぶ方法は１０通りある。全部並べると

$$abc\ \ abd\ \ abe\ \ acd\ \ ace$$
$$ade\ \ bcd\ \ bce\ \ bde\ \ cde$$

こんなふうになる。

　例えばそのひとつ「 bce を選ぶ」場合を考えると、



こんな感じになる。

a,b,c,d,e の５人から
選ばれた b,c,e の３人が移動して
選ばれなかった a,d の２人がもとの場所に残される。
そして、このような選び方が１０通りあるということだ。

えり　　最初にいた全員の人数の「5」と、そこから選ばれた人数の「3」で ${}_5C_3$ と表すわけね。

かん　　先生の描いた図を見ると、${}_5C_3$ という記号の表現は、取り残されている a,d の2人が無視されてかわいそうな感じがなぜかしらあります。

そういう感覚というのは、数学的にも大切だよ。平等であるべきものが、平等に表現されているかどうかに気を配ることが大切なのは、人間関係だけじゃないんだよ。数学では「対称性」という重要な観点に結びついている。

(2)　パーミュテーションとコンビネーション

ところで、

$$ {}_5C_3 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} $$

←　５，４，３の 3 個の積

←　３の階乗

というのは計算の仕方としてはわかりやすいけど、

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} $$

はどんな感じだい？

かん　　$\frac{{}_nP_r}{r!}$ の部分は授業でやったんだけど、まだピンときていません。それと順列の定義 ${}_nP_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ の中にも出てくる $n-r+1$ の部分はわかりにくい感じがしています。

それじゃ次に、

$$ {}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1} = 10 $$

という計算がどうして成り立つかについて復習してみよう。

まず、${}_5P_3$ は、a,b,c,d,e の「5 人から 3 人を選んで」「その 3 人を１列に並べる」ということだから、もしも先に ${}_5C_3$ がわかっていれば、${}_5P_3$ ＝ ${}_5C_3$ × $3!$ と表すことができるだろ。

一方で、${}_5P_3$ は、a,b,c,d,e の

「5 人から」まず、(1)番目に並ぶ人を選んで

更に「残った 4 人から」(2)番目に並ぶ人を選んで

最後に「残った３人から」（３）番目に並ぶ人を選ぶ

というふうに、積の法則から直接的に求められるから、${}_5P_3 = 5\cdot 4\cdot 3$

したがって、

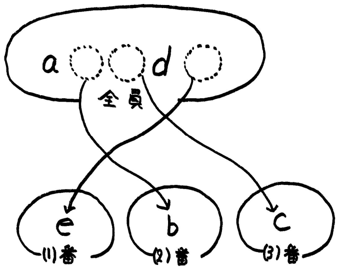
$$ {}_5C_3 \times 3! = {}_5P_3 = 5\cdot4\cdot3 \quad \rightarrow \quad {}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = 10 $$

教科書にのっている説明はこんな感じだね。

ころ　　わかるんですけど、なんか ${}_5P_3 = 5\cdot4\cdot3$ のほうは直接的に求められるのに、${}_5C_3$ は間接的な点がちょっと。

えり　　流れが途中から逆方向に流れているから。

それじゃ、流れが変わらないように説明してみるね。



これが ${}_5P_3$ のイメージ

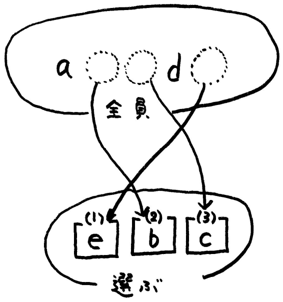
「5 人から」まず、(1)番目に並ぶ人を選んで

更に「残った 4 人から」(2)番目に並ぶ人を選んで

最後に「残った３人から」（３）番目に並ぶ人を選ぶ

ということから、${}_5P_3 = 5\cdot4\cdot3$

ところでこれは、次のように書いても同じです。



「選ぶ」ものを入れる場所に

場所を表す標識(1) (2) (3) をつけた置き場所を用意して

そこに

a,b,c,d,e の 5 人から

順に入る人を決めてゆくのと同じだから

これも ${}_5P_3 = 5\cdot4\cdot3$ 通り

さて、この時点では、同じ組み合わせ b,c,e が入っているものでも、それぞれについている標識の番号が違うものは、別々なものとしてカウントされている。

(1) (2) (3) の場所に順に

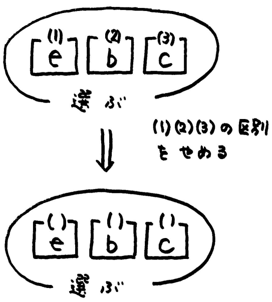
bce bec cbe ceb ebc ecb 　が入っている $3! =$ ６通りが別々の場合として数えられていてそれが全部で ${}_5P_3 = 5\cdot4\cdot3$ 通りあるのだから、並ぶ順番に関係なく 3 人の組合わせだけが問題とされていれば、この $3! =$ ６通りを同じ場合と考えなければならない、つまり、

この６通りを１つの場合としてカウントするのだから、場合の数は$\dfrac{1}{3!}$倍になる。

したがって

${}_5C_3 = \dfrac{{}_5P_3}{3!} = \dfrac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1} = 10$　通り　が得られた

ここで大切なのは



(1) (2) (3) の標識をつけて、区別して数えた結果 X がわかっていて、その区別をやめた場合の数を知りたいとき。

例えば(1) (2) (3) の標識を区別のつかない標識、例えば(　)(　)(　)に書き換えると、

その場合の数は $X \div 3!$ で与えられるということです。

ころ　r 個のものを区別して場合の数が X 通りなら、その区別をやめて同じものとみなす場合の数は$\dfrac{X}{r!}$になるというわけですね。この考え方を使えば、逆方向の流れを順方向に変えて理解する事ができる。

かん　${}_5P_3$ はa,b,c,d,eの 5 人のうちの３人を場所を表す標識(1) (2) (3) をつけた置き場所に並べる方法で、(1) (2) (3) の標識を区別のつかない標識（選ぶ）（選ぶ）（選ぶ）に置き換えるとその場合の数${}_5C_3$ は$\dfrac{{}_5P_3}{3!}$ になる。

2．ファクトリアル・マジックの世界

実は、

$$\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=\frac{5!}{3!2!}$$

という計算から、${}_5C_3$ は

$${}_5C_3=\frac{5!}{3!2!}$$

と、階乗だけで表すことができます。

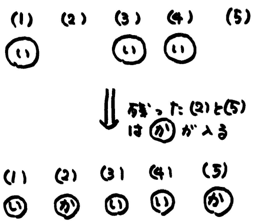
また、授業で「同じものを含む順列」というのをやったと思うけど、

例えば いいいかか の 5 文字全部を一列に並べてできる順列も $\frac{5!}{3!2!}$ 通りだったよね。これが ${}_5C_3$ と同じになる理由はわかるかい？

えり 

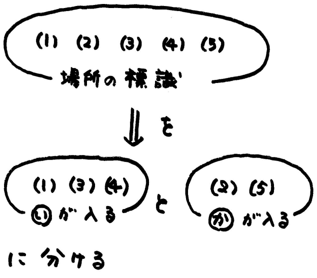
と文字を置く場所を用意して、

場所を表す標識(1)(2)(3)(4)(5)から
そこに「い」が入るもの 3 箇所を選ぶ方法を考えます。



例えば選ばれた標識が(1)(3)(4)なら、
そこに「い」を入れて
残りの 2 箇所(2)(5)には自動的に「か」が入るから
求める場合の数は ${}_5C_3$ になります。

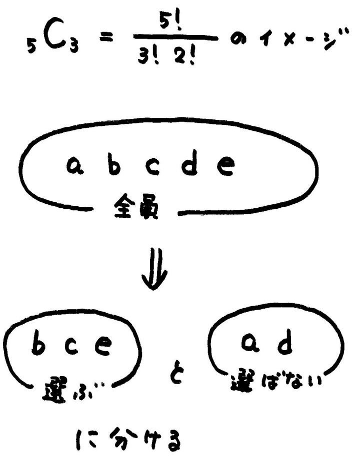
そうだね。今、えりさんは標識(1) (2) (3) (4) (5)から、そこに「い」が入るもの 3 箇所を選んで、「か」の入る場所は自動的に決まると考えたわけだけれど、これは



場所を表す標識(1) (2) (3) (4) (5)
を
そこに「い」が入るもの 3 箇所
と
そこに「か」が入るもの２箇所
に分ける

と考えても同じだよね。そしてこの場合の数が ${}_5C_3 = \dfrac{5!}{3!2!}$ に等しい。

同じように、「a,b,c,d,e の 5 人から 3 人を選ぶ」場合の数も



と考えることができる。

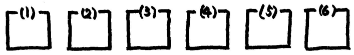
えり　$\dfrac{5!}{3!\ 2!}$ ← 5人を
← 選ばれる3人と選ばれない
2人に分ける

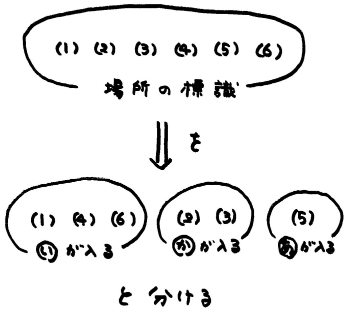
と式の形を読むといいんですね。

そうです。式の形がそのまんま意味につながってくるだろう。

かん　これだったら、a,d が取り残されていないね。平等です。

いいいかかあ　の６文字全部を一列に並べてできる順列が $\dfrac{6!}{3!2!1!}$ 通りになることは説明できるかい？

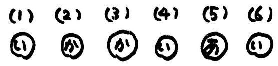
かん　　まず、文字を置く場所を用意して、 



こんなふうに考えればいいんですね。

だから

$$\frac{6!}{3!2!1!}$$ 通りになる

この図の分け方だと  と並びます。

次に、${}_5P_3 = 5\cdot4\cdot3$ について、もう一度考えてみよう。

$$
\begin{aligned}
{}_5P_3 = 5\cdot4\cdot3 &= \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1} \\
&= \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot1} \\
&= \frac{5!}{1!1!1!2!}
\end{aligned}
$$

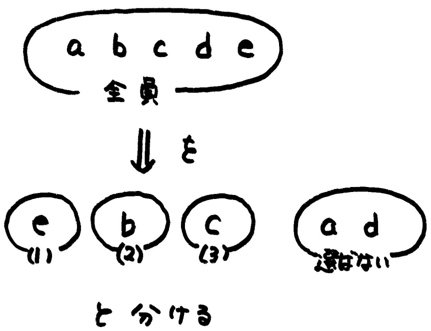
この計算から

${}_5P_3 = 5\cdot4\cdot3$ は

$\dfrac{5!}{1!1!1!2!}$ に等しい

ころ　　わかった！

$${}_5P_3 = \frac{5!}{1!1!1!\,2!}$$ のイメージ



こう考えればいいんですね。

えり　　Pも同じなんですね。魔法みたい！　これはファクトリアル・マジックですね。

いいネーミングだね。それ使わせてもらおう。

かん　　先生、これどうやって思いついたんですか？

高校 3 年生のとき、ＣとＰに違和感を感じているころ、ある日、そのことを考えながら散歩していたんだよ。そして、偶然通った道から小学校の運動会が見えた。徒競走で 5 人が走ってゴールした後、3 位までの生徒はお姉さんに手を引いてもらって本部席で賞状をもらうんだけど、他の二人がそのまま自分の席に戻るのを見て、あの二人も参加賞とかもらえないのかなあ、とか、考えていたらアッと思った。これはＣとＰに感じている違和感と同じだ。そしたら

${}_5P_3 = \dfrac{5!}{1!1!1!2!}$ が頭の中に浮かんだ。

かん　　散歩しながら数学を考えるなんてすごい！

３．ＣとＰに替わって

話をもっとスッキリさせるため、

$$[k,\ l] = \frac{(k+l)!}{k!\,l!}$$

$$[k,\ l,\ m] = \frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!}$$

さらに

0以上の整数からなる数列

$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$

に対して

$$[a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n] = \frac{(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)!}{a_1!\,a_2!\,a_3!\cdots\cdots a_n!}$$

と定義する

このように記号を考えよう。最後の部分は、難しく感じたら無視してよい。
この記号を使うと、

$$ {}_5C_3 = \frac{5!}{3!2!} = [3,2] $$

$$ {}_5P_3 = \frac{5!}{1!1!1!2!} = [1,1,1,2] $$

「５人から３人」を選ぶという見方を
5 人を「選ぶ 3 人と選ばない 2 人」に分けると考え直す。
「５人から３人」を選んで並べるという見方を
5 人を「最初の 1 人と次の 1 人とその次の 1 人と選ばない 2 人」に分けると考え直す。

$$ {}_nC_r = [r, n-r] = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

$$ {}_nP_r = [1,1,\cdots,1,n-r] = \frac{n!}{(n-r)!} $$

１が r 個↑

ころ　　先生、問題集をやっていて、どうもいまいちわからない問題があったので、質問していいですか。

どんな問題だい？

ころ (1) 6 冊の異なる本を、AさんBさんCさんの 3 人に 2 冊ずつ貸し出す方法は何通りか

(2) 6 冊の異なる本を 2 冊ずつ3つの組に分ける方法は何通りか

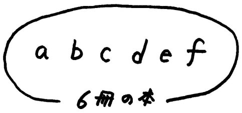
この 2 問が問題集に並んでのっていて、最初私は同じ問題だと思って

どちらも $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ 通りと答えたんですが、解答を見ると(2)の方は

正解が $\frac{6!}{2!2!2!} \div 3! = 15$ 通りとなっていました。一応、書いてある説明を理解したつもり

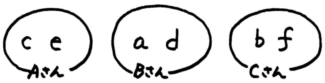
なんですが、どうもピンときません。

最初に



このように 6 冊の異なる本があるわけだね

これを



このようにＡ、Ｂ，Ｃの 3 人に
2 冊ずつ分ける方法は

今までやったように $[2,2,2]=\dfrac{6!}{2!2!2!}$ 通りだね。

ところが(2)では

このように誰のものかまだ決まってない、2 冊ずつの組を３つつくるんだから

ころ　　あ！　「$3!$ で割る」んですね。

えり　　そのあとにこんな問題もありました。
(3) 7 冊の異なる本を、3 冊、2 冊、2 冊の組に分ける方法は何通りか。

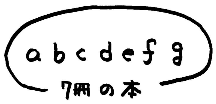
これは誰のものかまだ決まってない、3 冊、2 冊、2 冊の組をつくるんだから

$\dfrac{7!}{3!2!2!}\div 3!$ かなと思ったんだけど

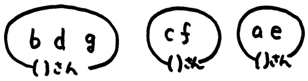
正解は $\dfrac{7!}{3!2!2!}\div 2!$ でした。

それは何故だかわかるかい？

えり　　最初に 7 冊の異なる本があって



この本を 3 冊 2 冊 2 冊の3つの組に分けます

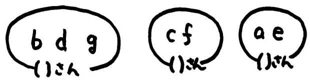


その分け方を X 通りとする
この()の中に名前を入れてその人にあげる

さてもし A さんに 3 冊、B さん C さんに 2 冊ずつあげるのであれば
3 冊の組は自動的に A さんのものになるから B さん C さんにどちらの組をあげるかを決めて $\boldsymbol{X} \times \mathbf{2!}$ 通りこれが $\dfrac{\mathbf{7!}}{\mathbf{3!2!2!}}$ 通りに等しいから

$$\boldsymbol{X} = \frac{\mathbf{7!}}{\mathbf{3!2!2!}} \div \mathbf{2!}$$

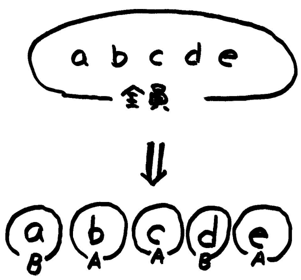
そうだね



この場合、３つの組の標識はどれも(　)になっているけど

3 個入りの（)、2 個入りの（)、2 個入りの（）と書けるわけで、
3 個入りの（）はほかの標識とは交換できないので、同じ標識とは見なさないというわけだね。

最後に、5 人を 3 人の A グループ 2 人の B グループに分ける方法をもうひとつの見方で書いてみよう。



これも、$_5\boldsymbol{C}_3 = \dfrac{\mathbf{5!}}{\mathbf{3!2!}}$ （同じ標識が、AAA と BB）
の表現になっているね。そしてこれが AAABB の順列（同じものを含む順列）になっていることもわかると思う。

それでは、時間がきてしまったので、これで終わります。明日は、今日の考え方を使って問題演習をやりましょう。