

九九の表の数理——田村二郎先生

これからここに書く話は、25年くらい前に、数学者の田村二郎先生から直に聞いた話です。とても貴重な話だったので、何かの形で残しておきたいと思っていました。

公立高校の研修プログラムで、北海道教育研究所（道研）に1週間寝泊りしながら、数学漬けの生活をするという幸運に恵まれました。そのときの講師の先生が田村二郎先生だったわけです。

先生は、東大紛争のの時に、東大の教養学部長の職にあったわけですが、「市民の数学」をやるんだと言って、東大に辞表を出して（確かペルーだったと思うが）南米の大学に数学を教えに行った。そんな人なんです。

道研というのはかなり田舎にあり、周りには何も無く、酒類の持込が禁止されているということもあって（でも多少は見逃してくれていましたが）、夜はヒマなわけです。

そこで何人かの研修者と一緒に、田村先生と話をしようということになり、酒を持って先生の部屋を訪ね、いろいろお話を伺いました。

さて、田村先生のお話で、特に印象に残ったのは九九の表にひそむ数理の話です。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

九九の表を左に書いて見ました。この表を使って、田村先生は

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

が成り立つことを説明してくださいました。

この表は

	B
A	C

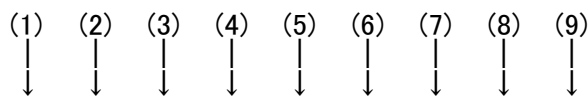
の形をしています。

そこで、それぞれの部分を、A、B、Cの記号で呼ぶことにします。まず、Cの部分に書かれた数の和は

$$\begin{aligned}
&1+2+\cdots+9 \\
&+2(1+2+\cdots+9) \\
&+3(1+2+\cdots+9) \\
&\dots\dots\dots \\
&+9(1+2+\cdots+9) \\
&=(1+2+\cdots+9)(1+2+\cdots+9)
\end{aligned}$$

となり (A の部分の和) × (B の部分の和) であるとわかります。
この和を別の方法で表します。

左のように表の C の部分を (1) から (9) のように分けます。



そして、各部分の和を求めてみると

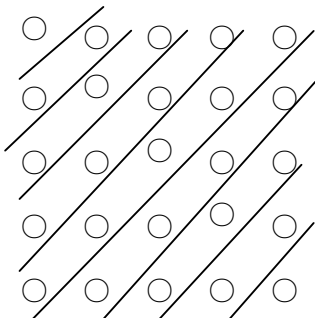
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$$\begin{aligned}
(1) \quad &1=1^3 \\
(2) \quad &2+4+2=2(1+2+1)=2\cdot 2^2=2^3 \\
&3+6+9+6+3+1 \\
(3) \quad &=3(1+2+3+2+1) \\
&=3\cdot 3^2=3^3 \\
&\dots\dots\dots \\
(9) \quad &9(1+2+\cdots+8+9+8+\cdots+1) \\
&=9\cdot 9^2=9^3
\end{aligned}$$

したがって、C の部分の数の和は $1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3$ と表すことができます。

ここで、 $1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1=n^2$ を使いましたが、これが

下図で説明できるところも面白いところです。



$$\begin{aligned}
&1+2+3+4+5+4+3+2+1 \\
&=5^2 \quad \text{の説明}
\end{aligned}$$

以上から $1^3 + 2^3 + \dots + 9^3 = (1 + 2 + \dots + 9)^2$

が成り立つことがわかりました。

田村先生のおっしゃったことで、もうひとつ忘れられない言葉があります。

「南米の大学で教えていたとき、『教師はカルボン（炭）』と言って、先生たちがみんな一所懸命だったのを思い出すよ。自分を燃やして、灰になっても、若者たちに力を与えるのが教師の仕事だっ
ていうことだな。」

若い頃に田村先生と出会えて本当に良かった。