分数計算の感覚を生かして「互いに素」を理解する

by u1248

「数学とは、 異なるものを同じものとみなす技術である」アンリ・ポアンカレ

以下、断らない限り、文字はすべて正の整数を表すことにする。

１． 約分と最大公約数

$\frac{6}{5}$はこれ以上約分できないが（このことを「$\frac{6}{5}$は既約である」という）

$\frac{15}{12}$は約分できて、$\frac{15}{12}=\frac{5\times3}{4\times3}=\frac{5}{4}$となる。

これは、分子 15 と分母 12 が最大公約数 3 を持つからだ。

このことを「分数$\frac{15}{12}$は、3 で約分すると既約分数$\frac{5}{4}$になる」という。

２数a , bの最大公約数を（a , b）で表す。

この記号を使うと上の例は

（6， 5）＝1　　だから$\frac{6}{5}$はこれ以上約分ができない。

（15，12）＝3　　だから$\frac{15}{12}=\frac{5\times3}{4\times3}=\frac{5}{4}$と分母分子を３で割って既約分数にできる。

と表現することができる。

２数a , bが１以外に共通の約数を持たないことを「a , bは互いに素」であるという。

これは「分数　$\frac{b}{a}$　が既約分数である」というのと同じことだ。

先程の（a , b）を使って

（a , b）＝1　と数式で表現するのも簡潔だ。

分母a分子bからなる分数$\frac{b}{a}$について、（a , b）＝d とすると

d＝1　⇔　$\frac{b}{a}$は既約　　　d＞1　⇔　$\frac{b}{a}$は d で約分して既約分数になる

＜例題１＞

$\dfrac{323}{221}$ を約分して既約分数にせよ。

３２３と２２１の最大公約数を見つければよいのだが、大きい数なので大変だ。そこで、

「約分することが可能な分数なら、
帯分数に直した、その分数部分も同じ数で約分できる」・・・①

ことから、

$$\frac{323}{221}=1+\frac{102}{221}$$

と直して $\dfrac{102}{221}$ を約分すればよい。さらに、

「約分することが可能な分数は
分母と分子を交換しても同じ数で約分できる」・・・・・・・・・②

ことから、

分母分子を交換して

$$\frac{102}{221} \quad \Rightarrow \quad \frac{221}{102}$$

また、①と②を繰り返し使うと次のようになる。

帯分数に直すと

$$\frac{221}{102}=2+\frac{17}{102}$$

分母分子を交換して

$$\frac{17}{102} \quad \Rightarrow \quad \frac{102}{17}$$

これは、

$$\frac{102}{17}=\frac{17\times 6}{17}$$
$$=6$$

となるので、結局最初の分数も１７で約分できるということになる。

実際、

３２３÷１７＝１９

２２１÷１７＝１３

したがって、

$$\frac{323}{221}=\frac{17\times 19}{17\times 13}$$
$$=\frac{19}{13}$$

とかける。これは３２３と２２１の最大公約数を求めたことにもなる。先ほどの記号で表すと、

（３２３，２２１）＝１７

となる。

練習１

次の分数を約分して、既約分数に直せ。

１） $\frac{2257}{1073}$　　２） $\frac{961}{713}$　　３） $\frac{667}{437}$

1.　約分することが可能な分数なら、帯分数にした分数の部分も同じ数で約分できる
2.　約分することが可能な分数は、分母と分子を交換しても同じ数で約分できる

この二つを原理として、2 数の最大公約数を求めたわけである。

1.　とは逆に、

（a , b）＝d 、つまり分数$\frac{b}{a}$がd で約分できるなら、

$$\frac{b}{a}\pm 1=\frac{a\pm b}{a}$$
$$\frac{b}{a}\pm 2=\frac{a\pm 2b}{a}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{b}{a}\pm n=\frac{b\pm na}{a}$$

はいずれもd で約分できる。このように、

2 数の最大公約数は、一方に他方の倍数を加減しても変わらない。

すなわち、

（a , b）＝（a　,　$b\pm a$）＝・・・・＝（a　,　$b\pm na$）

が成り立つ。また、このことを使うと、

bをaで割った余りをrとするとき、$(a,b)=(a,r)$

（理由）bをaで割った商をq余りをrとすると

$b=aq+r$

$r=b-aq$となり

$(a,r)=(a,b-aq)=(a,b)$　が成り立つ。

すなわち、a , bの最大公約数（a , b）は、a , bの大きい方の数を「大きい方を小さい方で割った余りの数」に取り替えてもその値を変えない。
ただし、「割り切れる場合は、その小さい方の数がa , bの最大公約数に等しい」

このことを利用してもう一度＜例題１＞をやってみよう。

(323,221)=(102,221)　　323÷221=1 余り 102

=(102,17)　　221÷102=2 余り 17

=17　　102÷17=6　　割り切れる

したがって　(323,221)=17　である

ところで　３２３÷１７＝１９　　２２１÷１７＝１３　だから、

$$\frac{323}{221}=\frac{17\times19}{17\times13}=\frac{19}{13}$$

このようにして、お互いに割り算して、大きい方の数を「大きい方を小さい方で割った余りの数」に取り替えていけば、しだいに2数（の大きい方の数が）小さくなって、最後には割り切れて、最大公約数がわかる。この方法を**互除法**という。

練習 2　練習１を互除法て解いてみよ。

２数a , bの最大公約数（a , b）について、簡単に確認できることをいくつかあげておこう。

１）（a ， na）＝a

２）（a ， 1）＝1

３）（a ， $na+1$）＝1

２.「２数が互いに素」という条件を考える

「互いに素」、すなわち共通の約数が 1 以外にない 2 数について考えよう。

7 と 6、8 と 15、12 と 25 など、互いに素な 2 数を分母分子にもつ分数

$$\frac{7}{6},\frac{6}{7},\frac{8}{15},\frac{15}{8},\frac{12}{25},\frac{25}{12}$$

はすべて既約分数であり、これらの分数が既約分数になることと、これらの数の組が互いに素であることは同じ意味をもつ。

みなさんは、整数の理論については初心者かもしれないが、分数計算についてはかなりのキャリアの持ち主だと思う。そこで、分数計算で培った感覚をできるだけ生かして「2 数が互いに素」という条件にはどんな法則が成り立つか考えてみよう。

まず、ひとつ質問してみよう。

「既約分数の積（分母が分母の積、分子が分子の積の形の分数）は既約分数か？」

自分でいろいろ試して、Yes か No か確かめよう。

自分でいろいろな例を考えて、どんな法則が成り立つか考えること、これが整数問題の基本だ。頭の中だけではなかなか理解できないので、具体的な例をいっぱいつくって、実感しながら勉強しよう。でも、No を言うには、駄目だという例をひとつだけ見つければよい。これを「反例」という。

この質問の答えはＮｏ

既約分数 $\frac{7}{6},\frac{8}{15}$ の積は

$$\frac{7}{6}\times\frac{8}{15}=\frac{7\times8}{6\times15}=\frac{2\times2\times2\times7}{2\times3\times3\times5}=\frac{2\times2\times7}{3\times3\times5}=\frac{27}{45}$$

だから分母分子がともに 2 の倍数となり、2 で約分可能だ。

したがって

「既約分数の積は既約分数」は間違い。

いまやった作業を頭の中だけで思い浮かべられるようになって欲しいね。
具体的な計算の例から、こんな法則が成り立つんじゃないかと考えること。
マシンのように正確な計算をすることも大切だけど、そんな計算をしながら、
「こんな法則が成り立つかもしれない」と感じる心はもっと大切だ。
いまのように、あっさり否定されることもあるけど、
ひょっとしたら、自分だけの定理が作れるかもしれない。
整数の世界はそんな世界だ。

$(a,b)=1$ かつ $(a,c)=1 \Leftrightarrow (a,bc)=1$

a と b、a と c が互いに素ならば

$\dfrac{bc}{a}$ という分数をつくって、約分しようとしてもできないことから理解できる。

a は b とも c とも約分できないからだ。

逆にこの分数が約分できないとすると a は b とも c とも約分できないということだから

a と b、a と c が互いに素だとわかる

$\dfrac{12\times 15}{7}$ は、約分できないよね。

$(a,b)=1$ ならば、$(a,b^n)=1$

これも、$\dfrac{b^n}{a}$ という分数をつくって、約分しようとしてもできないから明らかだ。

$(a\,,\,b)=1$ ならば、$(ab,\,a+b)=1$

$\dfrac{a+b}{a}$ という分数つくってみると

$\dfrac{a+b}{a}=1+\dfrac{b}{a}$ であり、$\dfrac{b}{a}$ は約分できないから、$(a,\,a+b)=1$

同様に、

$\dfrac{a+b}{b}$ という分数つくってみると

$\dfrac{a+b}{b}=1+\dfrac{a}{b}$ であり、$\dfrac{a}{b}$ は約分できないから、$(b,\,a+b)=1$

$(a,\,a+b)=1$、$(b,\,a+b)=1$ だから、$\dfrac{a+b}{ab}$ も約分できないとわかる。

練習 3

⑴ $(a\,,\,b)=1$ ならば、$(ab,\,a^n+b^n)=1$ であることを説明してください。

⑵ $(a\,,\,b)=1$ で bc が a の倍数ならば c が a の倍数であることを説明してください。

$(a,b)=1$ で $ax=by=A$ が成り立つとき
A は ab の倍数だから、$A=abt$ とおける
したがって、$x=bt, y=at$ とおける。

$(a,b)=1$ で $ax=by=A$ が成り立つとき
この両辺で、左辺は a の右辺は b の倍数だから
A は a,b の公倍数だから、$A=abt$ とおける。
$ax=by=abt$ より $x=bt, y=at$ が得られる

$ax=by=abt$ の両辺を ab で割ってみると

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{a}=t$$

このことから

互いに素な分母をもつ、２つの分数が等しいならば、どちらの分数も整数だとわかる。

練習４　　京大９８年後期文系

a , b , p , q はすべて自然数で

$$\frac{p^2+q^2}{a}=\frac{pq}{b}$$

をみたしている。a と b の最大公約数が１のとき、次の問いに答えよ。
１） pq は b で割り切れることを示せ。
２） $\sqrt{a+2b}$ は自然数であることを示せ。

練習５　　２つの既約分数 $\dfrac{b}{a}, \dfrac{d}{c}$ について、

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}$ が整数ならば、$a=c$ であることを示せ。

練習６　　x を正の有理数とするとき、

$x+\dfrac{1}{x}$ が整数ならば、$x=1$ であることを示せ。

練習７　　$(a,b)=1$ のとき、a が bc の約数ならば、a は c の約数であることを示せ。

練習８　　$3x+7y=248$ を満たす正の整数の組 $(x\ ,\ y)$ は何組あるか。
　また、この $(x\ ,\ y)$ のうち、x^2+y^2 を最小にするものを求めよ。

練習９　　一橋大
$p\ ,\ q$ を素数とし、$p<q$ であるとき、
１）$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ をみたす整数 r は存在しないことを示せ。
２）$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ をみたす整数の組 $(p\ ,\ q\ ,\ r)$ を求めよ。

練習 10　　$x\ ,\ y$ の方程式 $3x+2y=n$ をみたす正の整数 $x\ ,\ y$ が
　ちょうど１０組あるような整数 n のうち、最小の値を求めよ。

練習 11　　３９で割ると２４余り、４１で割り切れる自然数のうち、
　最小のものを求めよ。